UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4nouvellesannal09pari

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME IX.

(LXVIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

101661
29/4/10.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

Tous droits réservés.

QA
1
N8
v.68

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[L¹16a]

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE RELATIFS A DES TRIANGLES ET A DES CONIQUES;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

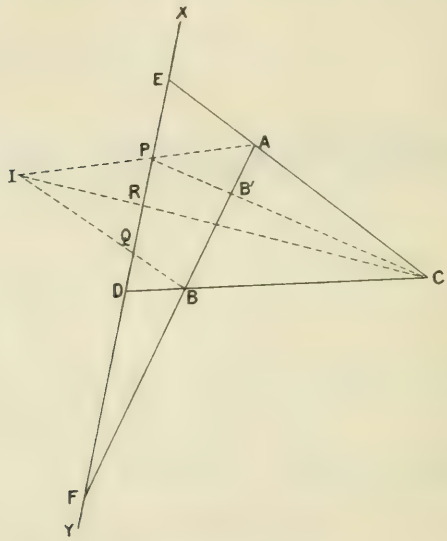
On démontre, en Géométrie élémentaire, un assez grand nombre de théorèmes relatifs à des droites concourantes, à des points en ligne droite sur les côtés d'un triangle. Les cercles circonscrits, inscrits, exinscrits, y interviennent souvent. En transformant ces théorèmes par la perspective, on en obtient de plus généraux où les cercles sont remplacés par des coniques. Je me propose, dans ce travail, de suivre la marche inverse. J'établirai directement les théorèmes les plus généraux, et j'en déduirai, comme cas particuliers, les propositions classiques. Les propriétés de l'homographie et de l'involution, les théorèmes de Pascal et de Brianchon, seront les moyens de démonstration employés.

THÉORÈME I. — *Pour que trois droites issues des sommets d'un triangle soient concourantes, il faut et il suffit que ces trois droites et les côtés correspon-*

dants du triangle déterminent sur une droite du plan trois couples de points en involution.

Soient (*fig.* 1) le triangle ABC dont les côtés BC, CA, AB coupent respectivement la droite XY aux

Fig. 1.



points D, E, F, et les trois droites concourantes AI, BI, CI qui coupent respectivement XY en P, Q, R. Je dis que les six points D, P; E, Q; F, R forment trois couples appartenant à une même involution sur la droite XY. Considérons en effet le faisceau des coniques passant par les quatre points A, B, C, I. Les couples de droites de ce faisceau sont : 1° BC et AI; 2° CA et BI; 3° AB, CI, lesquels coupent XY, le premier en D et P, le second en E et R, le troisième en F et R. Donc ces trois couples de points font partie d'une involution qui admet pour points doubles les points de

contact de XY avec les deux coniques du faisceau tangentes à XY.

On peut encore démontrer ce théorème en laissant fixes les points E, F, Q, R, A, B et en faisant pivoter la droite BC autour du point B. Le point C est mobile sur AE. On construit le point I par l'intersection de la droite fixe BQ avec la droite mobile CR, puis le point P par l'intersection de AI avec XY. Alors on reconnaît que D et P sont liés homographiquement. Si l'on met D en E, C vient en E, I en Q et P aussi en Q; si l'on met D en Q, C et I se confondent à l'intersection de BQ et AE, et le point P vient en E. De même, si D vient en F, P vient en R; et s'il vient en R, P vient en F. Donc l'homographie est une involution dont E, Q et F, R sont deux couples. C. Q. F. D.

Réciproquement, si les six points sont en involution, joignons BQ et CR qui se coupent en I, puis AI qui coupe XY en P′. P′ sera conjugué à D d'après la proposition directe. Donc P′ coïncide avec P, et les trois droites sont concourantes.

Comme exemple, considérons les médianes AM, BN, CP d'un triangle ABC. Si l'on coupe toute la figure par une parallèle à BC, le point D sera rejeté à l'infini, et l'on verra facilement que les points d'intersection avec XY sont symétriques par rapport au point d'intersection P de AM avec XY, ce qui constitue une involution dont P est le point central; d'où il suit que les trois médianes sont concourantes.

Corollaires. — 1° Échangeons les points D et P; pour cela joignons PC qui coupe AB en B′. Les trois droites AD, B′Q, CR sont concourantes.

2° Si l'on prend pour XY la droite de l'infini, on obtient la proposition suivante :

Pour que trois droites issues des sommets d'un triangle soient concourantes, il faut et il suffit que leurs directions et celles des côtés correspondants du triangle soient respectivement conjuguées par rapport à une conique.

Si cette conique est un cercle, on trouve que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Théorème II (corrélatif du précédent). — *Pour que trois points pris sur les trois côtés d'un triangle soient en ligne droite, il faut et il suffit que les droites qui joignent un point du plan à ces trois points forment avec celles qui joignent le même point aux trois sommets correspondants du triangle trois couples d'une involution autour de ce point.*

Théorème III. — *Si trois droites concourantes issues des sommets d'un triangle rencontrent une droite aux mêmes points que les trois côtés d'un autre triangle, les trois droites qui joignent les sommets du second triangle aux points d'intersection de la droite avec les côtés du premier triangle sont concourantes.*

Soient en effet D, E, F, D′, E′, F′ les intersections avec une droite XY des côtés BC, CA, AB, B′C′, C′A′, A′B′ des deux triangles. Puisque les droites AD′, BE′, CF′ sont concourantes par hypothèse, les six points D, E, F; D′, E′, F′ sont, d'après le théorème I, respectivement conjuguées dans une involution sur la droite XY. Alors, d'après la réciproque, les trois droites A′D, D′E, C′F sont concourantes.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si la droite XY est rejetée à l'infini, on obtient la proposition suivante :

Si les droites menées des sommets d'un triangle ABC *parallèlement aux côtés correspondants d'un second triangle* A′B′C′ *sont concourantes, les droites menées des sommets de* A′B′C′ *parallèlement aux côtés correspondants du triangle* ABC *sont aussi concourantes.*

Par rotation ou retournement d'un des deux triangles on en déduit le théorème relatif aux quadrangles métapolaires, et en particulier le théorème relatif aux triangles orthologiques.

Théorème IV (corrélatif du précédent). — *Si trois droites issues d'un même point* O *coupent les côtés d'un triangle en trois points en ligne droite, et si un deuxième triangle a ses sommets respectivement sur chacune de ces trois droites, les droites qui joignent le point* O *aux sommets du premier triangle déterminent sur les côtés correspondants du second trois points en ligne droite.*

Si l'on a sur une droite six points formant trois couples d'une involution et qu'on prenne les conjugués de ces six points dans une nouvelle involution sur la même droite, les six nouveaux points formeront encore trois couples d'une nouvelle involution. Cela résulte immédiatement de ce que la propriété involutive est projective.

Soit par exemple, sur une droite XY, trois points P, Q, R formant une involution avec trois autres points D, E, F, et une autre avec trois autres points D′, E′, F′. Si nous transformons les six points P, Q, R, D, E, F au moyen de la seconde involution, nous aurons les six nouveaux points D′, E′, F′; P′, Q′, R′ qui formeront encore une involution. Si donc trois droites

concourantes issues des trois sommets d'un triangle coupent une droite XY en trois points P, Q, R formant une involution avec les points D′, E′, F′ où la même droite XY coupe les trois côtés d'un deuxième triangle, les droites qui joindront les sommets correspondants de ce triangle aux points P′, Q′, R′, conjugués des points d'intersection D, E, F, des côtés du premier triangle dans l'involution définie par P, Q, R; D′, E′, F′ seront concourantes.

Si la droite XY est rejetée à l'infini, on obtient le théorème suivant :

Théorème V. — *Si trois droites concourantes issues des sommets d'un triangle ont leurs directions respectivement conjuguées, par rapport à une conique quelconque, des directions des côtés d'un second triangle, les droites de directions conjuguées de celles des côtés du premier triangle par rapport à la même conique, menées par les sommets correspondants du second triangle, sont aussi concourantes.*

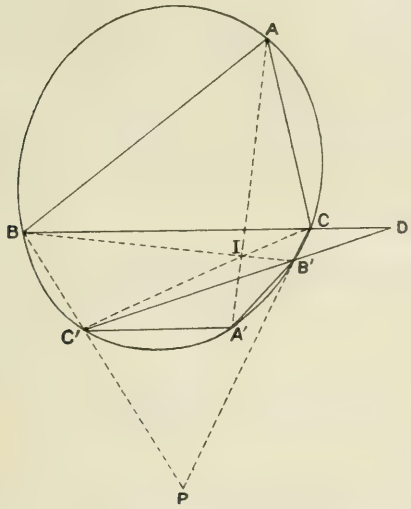
Si la conique est un cercle, on retrouve encore les triangles orthologiques.

Théorème VI. — *Si deux triangles homologiques* ABC, A′B′C′ *sont inscrits dans une même conique, les droites* AP, BQ, CR *qui passent respectivement par les points d'intersection* P *de* BC′ *et* CB′; Q, *de* CA′ *et* AC′; R *de* AB′ *et* BA′ *sont concourantes.*

En effet, soient I le centre d'homologie des deux triangles (*fig.* 2); D, E, F les points d'intersection respectifs de BC et B′C′, CA et C′A′, AB et A′B′. D'abord, les six points P, Q, R, D, E, F sont sur la

polaire de I qui est l'axe d'homologie des deux triangles. De plus, la polaire de P est la droite DI. Donc P et D

Fig. 2.



sont conjugués par rapport à la conique ; il en est de même de Q et E et de R et E. Donc les six points sont en involution sur l'axe d'homologie des deux triangles, et d'après le théorème I les trois droites AP, BQ, CR sont concourantes, ainsi que les trois droites A'P, B'Q, C'R.

Si l'on remarque que l'hexagone AB'CA'BC' est circonscrit à une conique à cause du théorème de Brianchon, on peut énoncer la proposition sous la forme suivante :

Si un hexagone est inscrit à une conique et circonscrit à une autre, les trois droites qui joignent chacun des trois sommets non consécutifs au point

d'intersection des deux côtés opposés ne passant pas par ce sommet-là sont concourantes.

Théorème VII (corrélatif du précédent). — *Soient deux triangles homologiques* ABC, A'B'C' *circonscrits à une même conique;* P *le point d'intersection du côté* BC *avec la droite qui joint les intersections de* AB *avec* A'C' *et de* AC *avec* A'B'; Q *et* R *les points obtenus par la construction analogue sur* CA *et* AB. *Les trois points* P, Q, R *sont en ligne droite.*

Ou encore :

Si un hexagone est inscrit à une conique et circonscrit à une autre, les points d'intersection de chacun des trois côtés non consécutifs avec la diagonale qui joint deux sommets opposés dont aucun n'est sur ce côté-là sont en ligne droite.

Il convient de remarquer que ces deux théorèmes s'établissent aisément à l'aide du théorème de Brianchon ou du théorème de Pascal, si l'on considère l'hexagone formé par les trois sommets ou les trois côtés considérés, et les trois diagonales. Par exemple, pour le théorème VI, il suffit de considérer l'hexagone formé par les six droites BC', CB', CA', AC', AB', BA' dans l'ordre indiqué. Ces six droites sont tangentes à une même conique, puisque ce sont, dans un autre ordre, les côtés de l'hexagone AB'CA'BC'. Mais, dans l'ordre indiqué, les sommets successifs sont P, C, Q, A, R, B, et les trois diagonales concourantes sont bien PA, CR, QB.

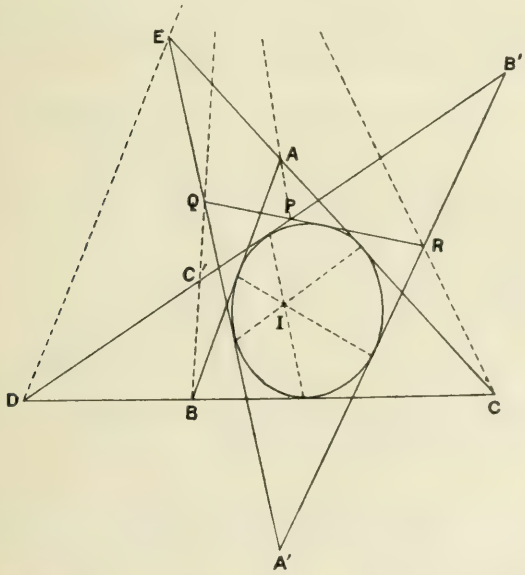
Théorème VIII. — *Si deux triangles homologiques sont circonscrits à une même conique, les droites qui joignent les sommets de l'un aux points*

de rencontre des côtés correspondants de l'autre avec une tangente à la conique sont concourantes, et le point de concours est sur l'axe d'homologie des deux triangles.

D'abord les trois droites sont concourantes, parce que les six côtés des deux triangles sont des tangentes en involution sur la conique et qu'elles déterminent ainsi sur une septième tangente six points en involution.

Je vais maintenant faire voir que, si l'on déplace la tangente, le lieu du point de concours des trois droites est l'axe d'homologie des deux triangles. Soient ABC, A′B′C′ (*fig.* 3) les deux triangles; I leur centre d'ho-

Fig. 3.



mologie, qui est aussi le point de concours des droites qui joignent les points de contact des côtés correspon-

dants [1]; P, Q, R les points d'intersection respectifs de la tangente avec B′C′, C′A′ et A′B′; ω le point de rencontre de BQ et CR. Si l'on se donne la direction de Bω, le point Q sera complètement déterminé sur A′C′; donc aussi la tangente, le point R sur A′B′, et la droite Cω. Donc déjà Bω et Cω sont des rayons homologues de deux faisceaux homographiques autour de B et C. Si l'on donne à Bω la direction de BC, la tangente mobile se confond avec BC et la droite Cω aussi. Donc le lieu de ω se compose de la droite BC, partie singulière, et d'une autre droite. Si maintenant on fait coïncider la tangente mobile avec BA, Bω se confond aussi avec BA, le point R est à l'intersection de BA avec B′A′, et ce point-là est le point ω; mais il est conjugué de I par rapport à la conique. De même, si l'on fait coïncider la tangente mobile avec CA, le point ω viendra au point d'intersection de AC avec A′C′ qui est aussi conjugué de I. Donc le lieu du point ω est la polaire de I qui est bien l'axe d'homologie des deux triangles. Remarquons que ce raisonnement prouve aussi que les trois droites AP, BQ, CR sont concourantes, puisque deux quelconques d'entre elles doivent se couper sur l'axe d'homologie.

Enfin le même théorème s'établit facilement à l'aide du théorème de Brianchon. Soient D, E, F les points d'intersection des côtés homologues des deux triangles. Considérons l'hexagone circonscrit BCEQRF dont les trois diagonales BQ, CR, EF passent par un même

---

[1] Il y a bien des manières de le démontrer. La plus simple consiste à transformer toute la figure homologiquement avec le même centre et le même axe que les deux triangles. Les deux triangles ne font que s'échanger et la conique, restant tangente aux six droites, se transforme en elle-même. Donc les points de contact homologues sont alignés sur le centre d'homologie.

point, d'où il suit que BQ et CR se coupent bien sur EF qui est l'axe d'homologie.

On peut remarquer que les six côtés des deux triangles pris dans l'ordre AB, C'A', BC, A'B', CA, B'C' forment un hexagone circonscrit à la conique et inscrit dans une autre, puisque, d'après l'homologie des deux triangles, les côtés opposés de cet hexagone se coupent en trois points en ligne droite. On obtient alors le nouvel énoncé, équivalent au précédent :

Soit un hexagone inscrit à une conique et circonscrit à une autre; numérotons les côtés de 1 *à* 6, *et joignons les points d'intersection des côtés* 1, 3; 3, 5; 5, 1, *respectivement aux points où les côtés* 2, 4, 6 *sont coupés par une septième tangente à la conique inscrite. Les trois droites ainsi obtenues concourent sur la droite de Pascal relative à l'hexagone.*

Théorème IX (corrélatif du précédent). — *Si deux triangles homologiques sont inscrits dans une même conique, les points d'intersection des côtés de l'un avec les droites qui joignent les sommets correspondants de l'autre à un point de la conique sont sur une même droite qui passe par le centre d'homologie des deux triangles.*

Ou encore :

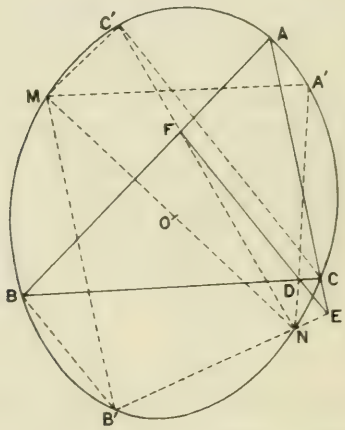
Soit un hexagone inscrit à une conique et circonscrit à une autre; numérotons les sommets de 1 *à* 6, *et prenons les points où les diagonales* 1, 3; 3, 5; 5, 1 *coupent respectivement les droites qui joignent les sommets* 2, 4, 6 *à un septième point de la conique circonscrite. Les trois points ainsi obtenus sont en ligne droite avec le point de Brianchon relatif à l'hexagone.*

La réciproque, qu'il est facile de démontrer soit par l'absurde, soit directement, peut s'énoncer ainsi :

Si un triangle est inscrit à une conique, les trois droites qui joignent un point de cette conique aux points d'intersection des trois côtés du triangle avec une droite (D) *coupent la conique en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle homologique au premier triangle, et le centre d'homologie des deux triangles est sur la droite* (D).

Supposons la droite (D) rejetée à l'infini. Par un point M de la conique circonscrite au triangle ABC (*fig.* 4), nous mènerons les cordes MA′, MB′, MC′,

Fig. 4.



respectivement parallèles aux côtés du triangle, et nous obtiendrons le triangle A′B′C′ homologiqne de ABC avec le centre d'homologie à l'infini. Prenons maintenant le point N diamétralement opposé de M et joignons-le à A′, B′, C′. D'après le théorème IX, les trois points D, E, F où les droites NA′, NB′, NC′ coupent

les côtés correspondants du triangle ABC seront sur une même droite passant par le centre d'homologie, c'est-à-dire parallèle aux droites AA′, BB′, CC′. Mais NA′ est la corde supplémentaire de MA′. Sa direction est donc conjuguée de celle de BC. Donc :

Si une conique est circonscrite à un triangle, cette conique est le lieu des points N *tels que les points de rencontre des côtés du triangle avec des droites de directions conjuguées de celles de chacun de ces trois côtés, menées par le point* N, *soient en ligne droite. Cette droite et les trois droites qui joignent les sommets du triangle aux points où les droites correspondantes issues de* N *coupent une seconde fois la conique sont parallèles.*

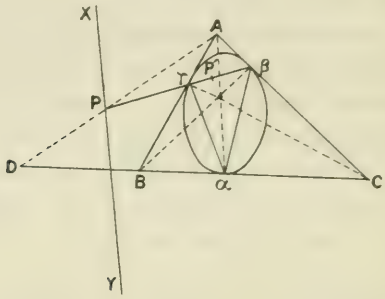
Si la conique est un cercle, on retrouve le théorème de Simpson avec la propriété qu'a la droite de Simpson d'être parallèle aux trois droites AA′, BB′, CC′.

Théorème X. — *Si deux triangles inscrits l'un dans l'autre sont homologiques, les droites qui joignent les sommets du triangle circonscrit aux points d'intersection d'une droite avec les côtés correspondants de l'un des deux coupent les côtés correspondants de l'autre en trois points en ligne droite.*

Soient le triangle ABC (*fig.* 5) et le triangle inscrit homologique $\alpha\beta\gamma$. Soient de plus P, Q, R les intersections respectives de $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ avec une droite XY ; D, E, F les intersections respectives de AP, BQ, CR avec les côtés opposés du triangle ABC. Il faut démontrer que D, E, F sont en ligne droite.

Puisque les deux triangles sont homologiques, il résulte du théorème de Brianchon qu'il existe une conique circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$ et inscrite au triangle ABC. La polaire de D par rapport à cette conique doit passer par α, et par le pôle P′ de AP. Or P′ se trouve sur $\beta\gamma$ et est conjugué de P par rapport

Fig. 5.



à $\beta\gamma$. Donc la polaire de D est $\alpha P'$. De même les polaires de E et F seront $\beta Q'$ et $\gamma R'$. Mais, puisque P, Q, R sont en ligne droite, les trois droites $\alpha P'$, $\beta Q'$, $\gamma R'$ qui coupent les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ aux points conjugués de P, Q, R, par rapport à chacun de ces trois côtés, sont concourantes. Donc leurs pôles D, E, F sont en ligne droite. C. Q. F. D.

On établira facilement par l'absurde la réciproque, c'est-à-dire que, si les trois points D, E, F sont en ligne droite, il en sera de même de P, Q, R.

Si l'on suppose que l'une des deux droites PQR, DEF est rejetée à l'infini, on obtient les propositions suivantes :

Si une conique est inscrite dans un triangle, les parallèles à chacune des cordes de contact menées par le sommet correspondant du triangle coupent les côtés opposés en trois points en ligne droite.

Si une conique est inscrite dans un triangle, les parallèles à chacun des trois côtés menées par le sommet opposé coupent les cordes de contact correspondantes en trois points en ligne droite.

Théorème XI (corrélatif du précédent). — *Si deux triangles inscrits l'un dans l'autre sont homologiques, les trois droites qui joignent les points où les côtés du triangle inscrit sont coupés par trois droites concourantes issues des sommets correspondants de l'un des deux aux sommets correspondants de l'autre sont concourantes.*

Considérons par exemple un triangle ABC et les pieds des trois hauteurs D, E, F. Si trois droites concourantes issues des sommets A, B, C coupent les côtés correspondants du triangle DEF aux points P, Q, R, les trois droites DP, EQ, FR sont concourantes.

Si H est l'orthocentre du triangle, on sait que les quatre points A, B, C, H sont les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle DEF. On sait aussi que les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points de contact des côtés opposés avec l'un de ces cercles sont concourantes. Donc :

Les droites qui joignent les trois sommets d'un triangle aux projections de l'orthocentre ou d'un des trois sommets sur les trois côtés correspondants du triangle formé par les pieds des hauteurs sont concourantes.

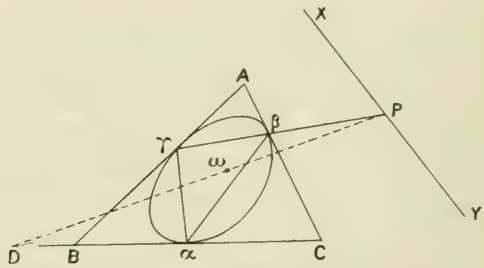
Si l'on considère les trois cercles exinscrits au triangle DEF, on verra aussi que les perpendiculaires menées des trois sommets du triangle sur les côtés correspondants du triangle DEF sont concourantes; mais

cette proposition est une conséquence immédiate du théorème relatif aux triangles orthologiques.

Théorème XII. — *Soient un triangle* ABC *circonscrit à une conique et une transversale* XY : *les trois droites qui joignent le pôle de* XY *par rapport à la conique aux points d'intersection de* XY *avec les côtés du triangle qui a pour sommets les points de contact coupent les côtés correspondants du triangle* ABC *en trois points en ligne droite.*

Soient α, β, γ (*fig.* 6) les trois points de contact,

Fig. 6.



ω le pôle de XY; P, Q, R les intersections respectives de XY avec $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$; D, E, F celles de $P\omega$ avec BC, de $Q\omega$ avec CA, et de $R\omega$ avec AB. Il faut démontrer que les trois points D, E, F sont en ligne droite. Or le pôle de $A\omega$ devant se trouver sur $\beta\gamma$ et sur XY est en P. Donc les droites ωA et ωP ou ωD sont conjuguées par rapport à la conique. Donc les six droites ωA, ωD; ωB, ωE; ωC, ωF forment bien trois couples d'involution autour de ω, ce qui est la condition pour que les trois points D, E, F soient en ligne droite (théorème II).

Si la droite XY est rejetée à l'infini, le point ω est le centre de la conique, et l'on a la proposition suivante :

Si une conique est inscrite à un triangle, les parallèles aux cordes de contact menées par le centre de la conique coupent les côtés correspondants du triangle circonscrit en trois points en ligne droite.

Théorème XIII (corrélatif du précédent). — *Si une conique est inscrite à un triangle, qu'on mène par les sommets de ce triangle trois droites concourantes, et qu'on coupe ces trois droites par la polaire de leur point de concours par rapport à la conique, les droites qui joignent les points ainsi obtenus aux points de contact de la conique avec les côtés correspondants du triangle sont concourantes.*

Si le point de concours est le centre de la conique, les droites qui joignent les sommets du triangle circonscrit à ce centre ont leurs directions conjuguées respectivement de celles des cordes de contact, et, comme il faut leur mener des parallèles par les points de contact, on retombe sur le corollaire du théorème I.

Considérons un triangle et l'un des cercles inscrit ou exinscrits. On reconnaît de suite que la polaire de l'orthocentre est la droite qui passe par les points où les parallèles menées du centre à chacun des trois côtés coupent les cordes de contact correspondantes. Donc cette droite coupe les trois hauteurs en trois points qui, joints aux points de contact correspondants, donnent trois droites concourantes.

Si l'on remarque que les pôles des bissectrices des angles extérieurs B et C d'un triangle sont respectivement aux milieux des cordes de contact $\alpha\gamma$ et $\alpha\beta$ du cercle inscrit, on obtient la proposition suivante :

La droite qui joint les milieux de deux cordes de contact du cercle inscrit dans un triangle coupe la

bissectrice perpendiculaire à la troisième corde de contact et les bissectrices des deux autres angles extérieurs en trois points qui, joints aux points de contact correspondants, donnent trois droites concourantes.

Théorème XIV. — *Soient un triangle* ABC *circonscrit à une conique et une transversale* UV ; *les trois droites qui joignent le pôle de* UV *par rapport à la conique aux points d'intersection de* UV *avec les côtés du triangle coupent les cordes de contact correspondantes en trois points en ligne droite.*

Supposons (*fig.* 6) que les trois points D, E, F soient en ligne droite et que ω soit le pôle de cette droite. La droite $\alpha\omega$ a pour pôle le point D. Donc $\omega\alpha$ et ωD sont deux droites conjuguées. Donc les six droites $\omega\alpha$, ωD ; $\omega\beta$, ωE ; $\omega\gamma$, ωF forment bien trois couples d'involution autour du point ω, ce qui est la condition pour que leurs points d'intersection respectifs avec les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ soient en ligne droite.

Si la droite UV est rejetée à l'infini, ω est le centre et l'on a la proposition suivante :

Si une conique est circonscrite à un triangle, les parallèles menées du centre aux tangentes aux trois sommets du triangle coupent les côtés correspondants de celui-ci en trois points en ligne droite.

Si la conique est un cercle, la droite des trois points est la polaire de l'orthocentre du triangle formé par les trois tangentes.

Théorème XV (corrélatif du précédent). — *Si une conique est inscrite à un triangle, qu'on mène par les points de contact trois droites concourantes, et*

qu'on coupe ces trois droites par la polaire de leur point de concours par rapport à la conique, les droites qui joignent les points ainsi obtenus aux trois sommets du triangle sont concourantes.

Considérons un triangle ABC et l'un des cercles inscrit ou exinscrits; soient α, β, γ les points de contact. La polaire de l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$ est la droite qui passe par les points d'intersection de chacun des côtés du triangle ABC avec la parallèle menée du centre du cercle inscrit à la corde des contacts correspondante.

Donc cette droite coupe les trois hauteurs du triangle $\alpha\beta\gamma$ en trois points qui, joints aux trois sommets correspondants du triangle ABC, donnent trois droites concourantes.

Théorème XVI. — *Si deux triangles homologiques sont inscrits à une même conique, chacun d'eux est homologique au triangle formé par les tangentes à la conique menées par les sommets de l'autre.*

Soient $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ les deux triangles homologiques. A cause du théorème de Brianchon, l'hexagone $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ est circonscrit à une conique; on peut donc énoncer la proposition comme il suit :

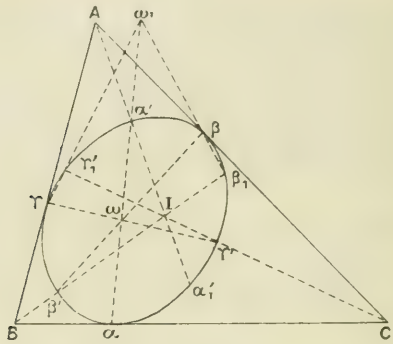
Si un hexagone est inscrit à une conique et circonscrit à une autre, les triangles formés par trois sommets non consécutifs et les tangentes à la conique circonscrite aux trois autres sommets sont homologiques.

Soient ABC (*fig.* 7) le triangle formé par les tangentes en α, β, γ, et ω le centre d'homologie des deux

triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'_1\beta'\gamma'$. Il s'agit de démontrer que les trois droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sont concourantes.

Donnons-nous comme fixes le triangle ABC et la conique, et par conséquent les points de contact α, β, γ,

Fig. 7.



et enfin le point α'. Menons maintenant par B une sécante quelconque qui coupe la conique en β' et β'_1. En joignant $\beta\beta'$ on obtient sur $\alpha\alpha'$ le point ω, et, en joignant $\beta\beta'_1$, le point ω_1. $\gamma\omega$ donnera sur la conique un second point d'intersection γ' et $\gamma\omega_1$ un second point d'intersection γ'_1. Inversement, si l'on se donne γ', on pourra construire successivement ω, β', β'_1, ω_1 et γ'_1, et, si l'on se donne γ'_1, on refera les mêmes constructions en sens inverse, et l'on retrouvera γ'. Donc γ' et γ'_1 forment sur la conique une involution. En donnant à $B\beta'$ les directions BC et BA, on trouvera les points doubles de l'involution qui sont α et β. Donc γ' et γ'_1 sont en ligne droite avec C. De plus, les droites $B\beta'\beta'_1$ et $C\gamma'\gamma'_1$ sont deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques autour de B et C, et à BC correspond CB. Donc, le lieu du point d'intersection I de $B\beta'$ avec $C\gamma'$ est une droite. Si l'on donne à $B\beta'$ la

direction BA, β' vient en γ et γ' en β. Donc, à la droite BA correspond la droite CA, et le point A fait partie du lieu. Enfin, si l'on met β' en α', ω vient aussi en α' ainsi que γ', et α' fait encore partie du lieu. Donc, le lieu du point I est la droite $A\alpha'$, ce qui démontre le théorème.

Remarque I. — Ce théorème est identique à son corrélatif.

Remarque II. — Si l'on mène les tangentes à la conique aux points α', β', γ', le triangle ainsi formé sera homologique au triangle ABC (*voir* la note de la p. 10) et l'axe d'homologie sera la polaire de ω.

Remarque III. — Considérons encore le triangle ABC circonscrit à la conique, α, β, γ étant les points de contact. Menons par les sommets de ce triangle trois droites concourantes AI, BI, CI qui rencontrent chacune la conique en deux points, savoir : α', α'_1 ; β', β'_1 ; γ', γ'_1. Joignons $\beta'\beta$ et $\gamma'\gamma$ qui se coupent en ω, puis $\alpha\omega$ qui coupe la conique en un second point α''. D'après la proposition précédente, $A\alpha''$ doit passer en I. Donc α'' est l'un des points α' ou α'_1 ; si c'est α', les trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sont concourantes. Remarquons maintenant que α' et α'_1 étant en ligne droite avec A sont sur la conique deux points conjugués d'une involution dont β et γ sont les points doubles. Il en résulte que le faisceau des quatre droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\alpha'$, $\alpha\alpha'_1$ est harmonique. Donc, puisque les trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sont concourantes, les trois droites $\alpha\alpha'_1$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ coupent les côtés opposés du triangle $\alpha\beta\gamma$ en trois points en ligne droite. Donc :

Théorème XVII. — *Si un triangle est inscrit dans*

une conique, qu'on considère les points d'intersection de la conique avec trois droites concourantes issues des pôles des côtés, et qu'on joigne aux sommets du triangle inscrit trois de ces points d'intersection pris chacun sur la droite correspondante, ou bien les trois droites ainsi obtenues sont concourantes, ou bien elles coupent les côtés correspondants du triangle inscrit en trois points en ligne droite.

Si la conique est un cercle, et si le point de concours I des trois droites est le centre, les droites $\alpha\alpha'$, $\alpha\alpha'_1$ seront les bissectrices des angles formés par $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$. On retrouve ainsi le théorème relatif aux bissectrices des angles d'un triangle.

Théorème XVIII (corrélatif du précédent). — *Un triangle étant circonscrit à une conique, on coupe par une transversale le triangle formé par les trois cordes de contact, et de chacun des trois points ainsi obtenus on mène les tangentes à la conique. Les points d'intersection de chacun des côtés du triangle circonscrit avec l'une des tangentes issues du point correspondant, ou bien sont en ligne droite, ou bien sont les pieds de trois droites concourantes issues des sommets du triangle circonscrit.*

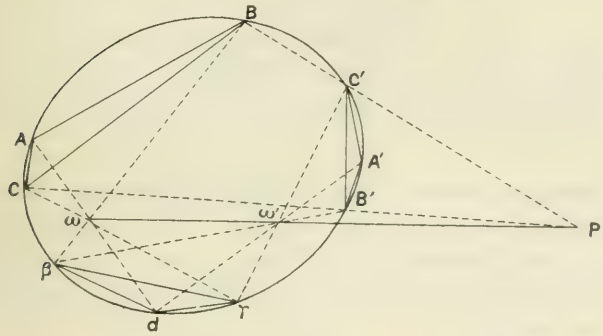
En particulier, si l'on suppose que la conique soit un cercle et que la transversale soit rejetée à l'infini, on obtient le théorème corrélatif de celui des bissectrices.

Théorème XIX. — *Si deux triangles* ABC, A'B'C' *inscrits dans une conique sont l'un et l'autre homologiques à un troisième triangle inscrit dans la*

même conique, les deux centres d'homologie sont sur la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit AB′CA′BC′.

Soient $\alpha\beta\gamma$ (*fig.* 8) le troisième triangle, ω et ω' ses

Fig. 8.



centres d'homologie respectifs avec ABC et A′B′C′. Il faut montrer que les trois points d'intersection P, Q, R de BC′ et CB′; CA′ et AC′; AB′ et BA′, et les deux points ω et ω' sont en ligne droite. Il suffit de considérer l'hexagone inscrit βBC′γCB′. βB et γC se coupent en ω, BC′ et CB′ en P, C′γ et B′β en ω'. Donc P est sur $\omega\omega'$ et il en est évidemment de même de Q et de R.

Réciproquement, tout triangle inscrit dans la conique et homologique à l'un des deux triangles ABC, A′B′C′ est homologique à l'autre si le centre d'homologie est sur la droite de Pascal PQR.

Supposons en effet que $\alpha\beta\gamma$ soit homologique à ABC et inscrit dans la conique. Laissant A′ et B′, remplaçons C′ par un autre point C″ de la conique, de manière que A′B′C″ soit homologique à $\alpha\beta\gamma$. La droite $\omega\omega'$ sera la droite de Pascal de l'hexagone AB′CA′BC″.

Mais celle de l'hexagone $AB'CA'BC'$ contient en commun avec la précédente les points R et ω. Donc les deux droites se confondent, et C'' coïncide avec C'.

Théorème XX (corrélatif du précédent). — *Si deux triangles dont les côtés sont désignés par a, b, c; a', b', c sont circonscrits à une conique et homologiques à un troisième triangle circonscrit à la même conique, les deux axes d'homologie passent par le point de Brianchon relatif à l'hexagone circonscrit $ab'ca'bc'$.*

Réciproquement, tout triangle circonscrit à la conique et homologique à l'un des deux triangles abc, $a'b'c'$ est homologique à l'autre si l'axe d'homologie passe par le point de Brianchon relatif à l'hexagone $ab'ca'bc'$.

Théorème XXI. — *Si trois triangles inscrits dans la même conique sont homologiques deux à deux, les trois centres d'homologie sont les sommets d'un triangle autopolaire dont les côtés sont les droites de Pascal des hexagones inscrits définis comme au théorème XIX.*

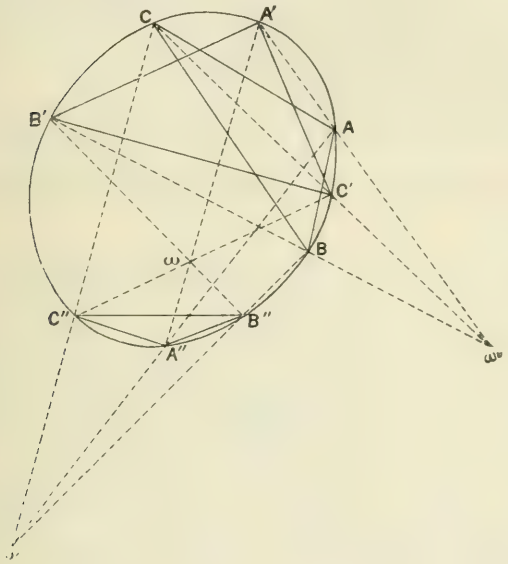
Soient ω (*fig.* 9) le centre d'homologie des triangles inscrits $A'B'C'$, $A''B''C''$; ω' celui des triangles $A''B''C''$, ABC, et ω'' celui de ABC et $A'B'C'$. La polaire du point ω passe par les points d'intersection de $B'C''$ avec $B''C'$, de $C'A''$ avec $C''A'$ et de $A'B''$ avec $A''B'$. C'est donc la droite de Pascal de l'hexagone $A'B''C'A''B'C''$, laquelle, d'après le théorème XIX, contient ω' et ω''.

Théorème XXII (corrélatif du précédent). — *Si trois triangles circonscrits à la même conique sont homologiques deux à deux, les trois axes d'homologie*

forment un triangle autopolaire dont les sommets sont les points de Brianchon relatifs aux hexagones définis comme au théorème XX.

Théorème XXIII (réciproque du théorème XXI). —

Fig. 9.



Si deux triangles inscrits dans une conique sont homologiques à un troisième inscrit dans la même conique, et si les deux centres d'homologie sont conjugués par rapport à la même conique, les deux triangles sont homologiques.

Soient en effet ABC, A'B'C', A''B''C'' les trois triangles inscrits; ω le centre d'homologie de A'B'C' et A''B''C'', ω' celui de ABC et A''B''C''. ω' est par hypothèse sur la polaire de ω. Mais cette polaire est la

droite de Pascal relative à l'hexagone $A'B''C'A''B'C''$. Donc, d'après la réciproque du théorème XIX, le triangle ABC, homologique à $A''B''C''$, l'est aussi à $A'B'C'$.

C. Q. F. D.

Théorème XXIV (corrélatif du précédent, réciproque du théorème XXII). — *Si deux triangles circonscrits à une conique sont homologiques à un troisième triangle circonscrit à la même conique, et si les deux axes d'homologie sont conjugués par rapport à la conique, les deux triangles sont homologiques.*

Si la conique est un cercle, on obtient la proposition suivante :

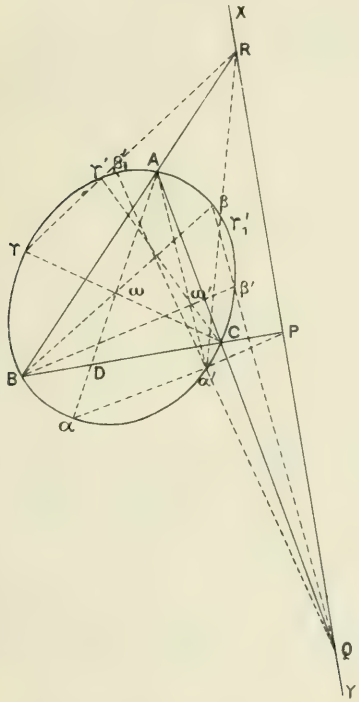
Soient, sur les côtés d'un triangle ABC, *trois points en ligne droite* P, Q, R. *Menons de chacun de ces points la deuxième tangente au cercle inscrit; nous formons ainsi un nouveau triangle circonscrit* $A'B'C'$. *Coupons-le par le diamètre perpendiculaire à la droite* PQR, *et soient* P', Q', R' *les points d'intersection avec* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. *Les secondes tangentes menées au cercle par les points* P', Q', R' *coupent les trois côtés du triangle* ABC *en trois points situés sur une même droite parallèle à* PQR.

En effet, le triangle $A'B'C'$ est homologique au triangle ABC et aussi au triangle $A''B''C''$ formé par les secondes tangentes issues de P', Q' et R'. De plus, les deux axes d'homologie sont conjugués. Donc les deux triangles ABC et $A''B''C''$ sont homologiques, et l'axe d'homologie devant former un triangle autopolaire avec deux droites rectangulaires dont l'une est un diamètre est parallèle à l'autre.

Théorème XXV. — *Si deux triangles homologiques sont inscrits dans une même conique, les droites qui joignent les sommets de l'un aux points d'intersection des côtés correspondants de l'autre avec une transversale déterminent sur la conique trois nouveaux points qui sont les sommets d'un triangle homologique au second.*

Soient $\alpha\beta\gamma$, ABC (*fig.* 10) les deux triangles inscrits

Fig. 10.



homologiques, XY la transversale qui coupe BC en P, CA en Q, AB en R. αP, βQ, γR rencontrent une seconde fois la conique aux points respectifs α', β', γ'.

Il faut démontrer que $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sont trois droites concourantes.

Donnons-nous comme fixes la conique, le triangle inscrit ABC, la transversale et par suite les points P, Q, R, et enfin les points de la conique α et α' alignés sur P.

Si l'on se donne β' sur la conique, la droite $Q\beta'$ donnera sur la conique un second point d'intersection β; $B\beta$ donnera le point ω sur $A\alpha$; $C\omega$ donnera γ sur la conique, et enfin $R\gamma$ donnera γ', d'où il suit qu'à chaque position de β' sur la conique correspond une position unique de γ', et réciproquement. Donc $B\beta'$ et $C\gamma'$ se correspondent par homographie. Si l'on met β' en C, β vient en A, ω aussi, et par suite γ. Donc γ' vient en B. A la droite BC correspond donc la même droite CB. Donc le lieu du point ω' où se coupent $B\beta'$ et $C\gamma'$ est une droite. Si l'on met β' en A, β vient en C et ω en D sur BC. Donc γ vient en B et γ' en A, comme β'. Donc A fait partie du lieu. Il reste à démontrer que α' en fait aussi partie. Mettons β' en α'. β prend une certaine position β_1 sur la conique, et ω une certaine position ω_1 sur $A\alpha$; enfin $\omega_1 C$ donne γ_1 sur la conique. Il faut montrer que $R\gamma_1$ passe en α'. Il reviendra au même de joindre $\alpha' R$ pour obtenir γ_1 et de démontrer que $C\gamma_1$ passe par ω_1, ou encore de prouver que les deux triangles $\alpha\beta_1\gamma_1$ et ABC sont homologiques. Or cela résulte immédiatement de la réciproque du théorème IX, les points α, β_1, γ_1 étant les seconds points d'intersection avec la conique des droites qui joignent α' aux points d'intersection des côtés du triangle ABC avec la droite PQR.

Remarque I. — Puisque le triangle ABC est homologique aux deux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, il résulte du

théorème XIX que la droite qui joint les deux centres d'homologie ω et ω' est la droite de Pascal de l'hexagone inscrit $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$.

Remarque II. — Si la droite XY est rejetée à l'infini, les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sont respectivement parallèles aux côtés du triangle ABC. Si de plus la conique est un cercle, on retrouve le théorème d'après lequel, si trois droites issues des sommets d'un triangle sont concourantes, les droites symétriques de celles-là par rapport aux trois bissectrices des angles du triangle sont aussi concourantes. En particulier, les symédianes sont concourantes. De plus :

La droite qui joint le centre de gravité d'un triangle au point de concours des symédianes passe par les points d'intersection respectifs des droites $\beta\gamma'$ et $\gamma\beta'$, $\gamma\alpha'$ et $\alpha\gamma'$, $\alpha\beta'$ et $\beta\alpha'$, si α, β, γ, α', β', γ' sont les seconds points d'intersection avec le cercle circonscrit des médianes et des symédianes.

Si les trois premières droites concourantes sont les hauteurs d'un triangle, les trois autres passent par le centre du cercle circonscrit. Si donc on désigne par α, β, γ les seconds points d'intersection des hauteurs avec le cercle circonscrit, et par A′, B′, C′ les points du cercle circonscrit diamétralement opposés aux sommets du triangle, la droite qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit passe par les intersections respectives des droites $B'\gamma$ et $C'\beta$, $C'\alpha$ et $A'\gamma$, $A'\beta$ et $B'\alpha$. On sait que cette droite passe aussi par le centre de gravité et le centre du cercle des neuf points du triangle. Nous la retrouverons plus loin.

Théorème XXVI (corrélatif du précédent). — *Étant donnés deux triangles homologiques circonscrits à une même conique, on mène par les sommets de*

l'un trois droites concourantes et, par les points où ces droites rencontrent les côtés correspondants de l'autre, trois nouvelles tangentes à la conique. Ces trois tangentes à la conique forment un triangle homologique au premier.

La réciproque du théorème XXV consiste en ce que tout triangle ABC inscrit dans la conique et homologique à la fois à deux autres triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ inscrits dans la même conique l'est aussi au triangle formé par les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Il est aisé de démontrer par l'absurde que ces droites coupent les côtés correspondants du triangle ABC en trois points en ligne droite. On peut aller plus loin et, en appliquant le théorème XIX, formuler la proposition générale :

Théorème XXVII. — *Si les côtés d'un triangle* UVW *coupent une conique, savoir :* VW *en* α *et* α'; WU *en* β *et* β'; UV *en* γ *et* γ', *tout triangle* ABC *inscrit dans la conique et homologique à deux des triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, UVW *l'est aussi au troisième, et les centres d'homologie du triangle* ABC *avec* $\alpha\beta\gamma$ *et* $\alpha'\beta'\gamma'$ *sont sur la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit* $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ (1).

Remarque. — Si l'on suppose le triangle UVW circonscrit à la conique, on retrouve le théorème XVI que, à cause de son importance et de sa simplicité relative, j'ai cru devoir démontrer directement.

Théorème XXVIII. — *Les pieds de deux systèmes*

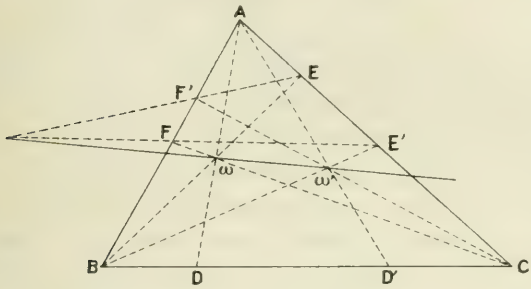
---

(1) C'est ce théorème, que j'avais démontré d'une manière différente, qui m'a servi à démontrer géométriquement un théorème remarquable de M. Bricard relatif aux cycles tangents aux côtés des deux triangles conjugués (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, avril 1908).

de droites concourantes issues des trois sommets d'un triangle appartiennent à une même conique.

Soient en effet, dans le triangle ABC (*fig.* 11), les droites AD, BE, CF qui concourent en ω, et les droites

Fig. 11.



AD', BE', CF' qui concourent en ω'. Je considère l'hexagone EF'CFE'B inscrit dans l'angle BAC. A cause du théorème de Pascal, l'intersection des côtés EF' et FE' se trouve sur la droite qui joint ω', intersection de F'C et E'B à ω, intersection de CF et BF. On verrait de même que FD' et DF' d'une part, DE' et ED' d'autre part, se coupent aussi sur la droite ωω', d'où il suit que l'hexagone DE'FD'EF' est inscrit dans une conique. C. Q. F. D.

Réciproquement, toute conique qui passe par les pieds de trois droites concourantes issues des sommets d'un triangle coupe les côtés de ce triangle en trois autres points qui, joints aux sommets opposés, donnent encore trois droites concourantes.

Remarque I. — Considérons le faisceau des coniques qui passent par les quatre points A, B, C, ω, et la polaire X'Y' du point ω' par rapport au triangle ABC. Soit D'_1 le point où X'Y' rencontre BC. Le lieu des

pôles de X′Y′ par rapport à chacune des coniques du faisceau est une conique qui passe d'abord par les points D, E, F, centres des trois systèmes de deux droites du faisceau. De plus, ce lieu doit couper BC au point D′ conjugué de D′₁ par rapport à BC, car D′ est le seul point de BC qui puisse être le pôle de X′Y′ par rapport à une conique proprement dite passant par B et C. De même, ce lieu passe aussi par E′ et F′, ce qui fournit une nouvelle démonstration de notre théorème. De plus, pour la même raison, les seconds points d'intersection de la conique avec les droites AD, BE, CF sont conjugués par rapport à Aω, Bω, Cω des points où chacune de ces droites rencontre X′Y′. De même enfin, les seconds points d'intersection de la conique avec les droites AD′, BE′, CF′ sont conjugués respectivement par rapport à Aω′, Bω′, Cω′ des points où ces trois droites rencontrent la polaire XY de ω par rapport au triangle ABC. Pour cette raison nous appellerons cette conique *la conique des douze points*.

Si, en particulier, l'un des systèmes de trois droites concourantes est composé des médianes, la droite XY correspondante est rejetée à l'infini, et l'on obtient la proposition suivante :

Toute conique qui passe par les milieux des côtés d'un triangle coupe ces côtés en trois autres points qui, joints aux sommets opposés, donnent trois droites concourantes, et la conique passe par les milieux des segments compris sur chacune de ces trois droites entre leur point de concours et les sommets du triangle.

Remarque II. — Si l'on se rappelle que la droite ωω′ est la droite de Pascal relative à l'hexagone DE′FD′EF′ et qu'on se reporte au théorème XIX, ou plutôt à sa

réciproque, et aussi au théorème XXVII, on verra que :

Si l'on joint les trois points D, E, F ou D′, E′, F′ à un point quelconque de la droite $\omega\omega'$, les trois droites ainsi obtenues coupent la conique des douze points en trois nouveaux points qui sont les sommets d'un triangle homologique aux deux triangles DEF, D′E′F′ et aussi au triangle ABC.

Ajoutons que tout triangle inscrit dans la conique des douze points et homologique à deux des triangles ABC, DEF, D′E′F′ est aussi homologique au troisième, et que les centres d'homologie avec DEF et D′E′F′ sont sur la droite $\omega\omega'$.

Remarque III. — Si l'on applique ces conclusions au cercle des neuf points, on obtient les résultats suivants :

1° Il existe une conique qui passe par les milieux des côtés d'un triangle, les pieds des hauteurs, les milieux des segments compris entre l'orthocentre et les sommets du triangle, et les trois points qui, sur chaque médiane, sont conjugués, par rapport au sommet et au centre de gravité, du point où cette médiane coupe la polaire de l'orthocentre par rapport au triangle.

2° Les droites qui joignent le milieu de chacun des segments compris entre un sommet et l'orthocentre au milieu du côté opposé concourent sur la droite qui joint le centre de gravité à l'orthocentre, parce que ces trois milieux sont les sommets d'un triangle homologique à la fois au triangle donné et au triangle formé par les pieds des hauteurs, d'où il suit qu'il est aussi homologique au triangle formé par les pieds des médianes. On reconnaît aisément que chacune de ces droites est la diagonale commune de deux rectangles inscrits. Donc la conique est un cercle qui a pour centre

le point de concours de ces diagonales. C'est le cercle connu sous le nom de *cercle des neuf points*. Donc le centre du cercle des neuf points est en ligne droite avec l'orthocentre et le centre de gravité. Nous appellerons cette droite *le diamètre principal du cercle des neuf points*.

3° Les droites qui joignent chacun des pieds des hauteurs au second point d'intersection de la médiane avec le cercle des neuf points concourent sur le diamètre principal.

4° Les points du cercle des neuf points M′, N′, P′ diamétralement opposés aux pieds des hauteurs forment un triangle homologique au triangle donné et aussi au triangle des pieds des médianes MNP. Mais les pieds des médianes sont diamétralement opposés aux seconds points d'intersection des hauteurs avec le cercle des neuf points. Donc les droites MM′, NN′, PP′ sont parallèles aux hauteurs et passent par le centre du cercle circonscrit au triangle. Donc le centre du cercle circonscrit est sur le diamètre principal du cercle des neuf points.

5° Si l'on joint soit les pieds des hauteurs, soit les pieds des médianes à un point quelconque du diamètre principal, les seconds points d'intersection de ces trois droites avec le cercle des neuf points forment un triangle homologique au triangle donné, au triangle des pieds des hauteurs, et à celui des pieds des médianes.

Rappelons enfin que, comme conséquence du théorème XXV, nous avons trouvé encore trois points qui sont sur le diamètre principal des cercles des neuf points.

Théorème XXIX (corrélatif du précédent.) — *Si* D, E, F ; D′, E′, F′ *sont deux systèmes de trois points en*

ligne droite sur les trois côtés d'un triangle ABC, *les six droites* AD, BE, CF, AD′, BE′, CF′ *sont tangentes à une même conique.*

Réciproquement, D, E, F étant trois points en ligne droite sur les côtés d'un triangle ABC, traçons une conique tangente aux trois droites AD, BE, CF. Les secondes tangentes menées à cette conique des sommets du triangle coupent les côtés opposés en trois points en ligne droite.

On peut encore modifier l'énoncé de la manière suivante :

Soient un triangle PQR *circonscrit à une conique et trois droites concourantes issues des sommets qui coupent les côtés opposés en* A, B, C. *Les secondes tangentes à la conique, issues de* A, B, C, *forment un triangle homologique au triangle* ABC.

En effet, les trois tangentes QR, RP, PQ coupent les côtés du triangle ABC en trois points en ligne droite, puisque les deux triangles PQR et ABC sont homologiques par hypothèse. Alors on retombe sur la proposition précédente.

[N¹1K]

SUR LES COURBES DONT LES TANGENTES APPARTIENNENT A UN COMPLEXE LINÉAIRE;

PAR M. E. KERAVAL,

Professeur au lycée Hoche.

Si Oz est l'axe du complexe, ces courbes peuvent être définies par la propriété suivante : « En chaque

point M de la courbe le plan osculateur contient la perpendiculaire MP à l'axe Oz. » Si les coordonnées x, y, z du point M sont fonctions d'un paramètre t, on a une relation de la forme

$$(1) \qquad xy' - yx' = Kz',$$

où K est une constante qu'on peut supposer positive. Pour abréger, j'appellerai ces courbes des courbes K. L'équation du plan osculateur peut s'écrire, en appelant X, Y, Z les coordonnées courantes,

$$(2) \qquad yX - xY + K(Z - z) = 0.$$

Ce plan osculateur fait avec le plan MOZ un angle α tel que

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{K}{\rho},$$

ρ désignant la distance MP. On sait que ces courbes K sont les lignes asymptotiques des surfaces

$$\frac{y}{x} = F(z),$$

de sorte qu'on peut écrire leurs équations

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{y}{x} = F(z), \\ &x^2 = \frac{K}{F'(z)}, \end{aligned} \right.$$

où F désigne une fonction quelconque.

Tous ces résultats sont bien connus et très faciles à établir. Voici une propriété qui, je crois, n'est pas connue :

Théorème. — *On peut définir les courbes* K *comme les courbes tracées sur une surface de révolution absolument quelconque et qui coupent les méridiens*

sous un angle aigu V *tel que*

$$\operatorname{tang} V = \frac{K}{N},$$

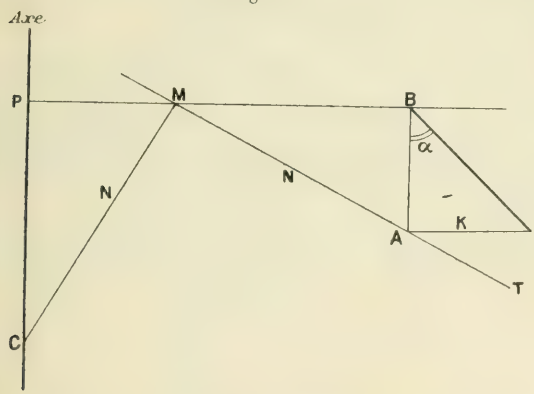
K *étant une constante primitive et* N *la longueur de la normale à la surface limitée à l'axe.*

Dans la suite cet axe sera toujours l'axe des z (les axes rectangulaires) et je l'appellerai l'*axe de révolution de la courbe.*

Ce théorème est bien facile à vérifier par le calcul; je préfère indiquer une démonstration géométrique fort simple.

Je figure le plan déterminé par M et l'axe (*fig.* 1).

Fig. 1.



Je fais tourner la courbe K qui passe par M autour de cet axe. Soient MT la tangente au méridien, MC = N la normale. La tangente en M à la courbe K se projette sur la feuille suivant MT. Si je prends

$$MA = MC = N,$$

j'aurai

$$AB = MP = \rho.$$

En vertu de la formule (3) $\operatorname{tang}\alpha = \frac{K}{\rho}$, le point pro-

jeté en A et de cote K appartiendra à la tangente à la courbe K. Dès lors cette tangente fait avec MA l'angle V tel que

$$\operatorname{tang} V = \frac{K}{N}.$$

Réciproquement, si tang V a cette valeur on a une courbe K. En effet on aura

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{K}{\rho};$$

la tangente fera partie du complexe linéaire, etc.

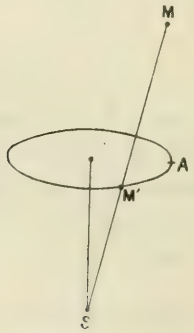
Cas particulier important. — Il est évident que sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe les courbes K doivent être les *génératrices rectilignes;* j'utiliserai plus loin cette propriété.

Conséquences. — 1° Si l'on prend la sphère comme surface de révolution, N = const., donc V = const.; les courbes K sont alors les loxodromies sphériques.

2° Sur le cylindre de révolution on obtient l'hélice circulaire.

3° Sur le cône de révolution on obtient une courbe

Fig. 2.



qui dans le développement du cône doit se transformer

en spirale hyperbolique et qu'on peut construire ainsi : on marque sur le cône de sommet S un cercle fixe et sur ce cercle une origine A.

On prend alors (*fig.* 2)

$$SM = \frac{\text{const.}}{\text{arc}\,AM'}.$$

Exemple :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\cos t}{t}, \\ y &= \frac{\sin t}{t}, \\ z &= \frac{1}{t}. \end{aligned}\right.$$

I. — Torsion des courbes K.

Je suppose x, y, z fonctions d'un paramètre t. On a

$$xy' - yx' = Kz'$$

par hypothèse.

L'équation du plan osculateur au point x, y, z est

$$yX - xY + K(Z - z) = 0.$$

D'autre part, cette équation peut s'écrire

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} A &= y'z'' - z'y'', \\ B &= z'x'' - x'z'', \qquad \Omega^2 = A^2 + B^2 + C^2, \\ C &= x'y'' - y'x''. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{A}{y} = \frac{B}{-x} = \frac{C}{K} = F.$$

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

La torsion sera

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta}{\Omega^2},$$

$$\Omega^2 = F^2(\rho^2 + K^2) \qquad \text{si} \qquad \rho^2 = x^2 + y^2,$$
$$\Delta = F(yx''' - xy''' + Kz''').$$

Mais

$$xy' - yx' = Kz',$$
$$xy'' - yx'' = Kz'',$$
$$yx''' - xy''' + Kz''' = x'y'' - y'x'' = KF.$$

Donc

$$\Delta = KF^2.$$

D'où

$$\frac{1}{T} = \frac{K}{\rho^2 + K^2}$$

et enfin

$$(4) \qquad T = K + \frac{\rho^2}{K}.$$

Cette formule a été donnée pour la première fois par M. Appell dans sa Thèse sur les cubiques gauches. La formule qui donne la courbure n'a pas été donnée, du moins à ma connaissance; elle est plus compliquée.

Courbure $\left(\frac{1}{R}\right)$ des courbes K.

J'envisage la courbe K comme tracée sur une surface de révolution d'axe Oz d'après la loi que j'ai indiquée :

$$\operatorname{tang} V = \frac{K}{N}.$$

Soient s l'arc de la courbe et σ l'arc du méridien :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\Omega^2}{s'^6} = \frac{F^2(\rho^2 + K^2)}{s'^6}.$$

Si je pose

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi,$$

$$\operatorname{tang} V = \frac{K}{N} = \frac{\rho\varphi'}{\sigma'},$$

$$s'^2 = \sigma'^2 + \rho^2\varphi'^2 = \frac{\sigma'^2(K^2+N^2)}{N^2},$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{F^2(K^2+\rho^2)N^6}{(N^2+K^2)^3\sigma'^6}.$$

Pour calculer F je me sers de la formule

$$x'y'' - y'x'' = KF,$$

qui s'écrit

$$KF = 2\rho'^2\varphi' + \rho\rho'\varphi'' - \rho\rho''\varphi' + \rho^2\varphi'^3,$$

$$\varphi' = \frac{Kz'}{\rho^2}, \qquad \varphi'' = \frac{K(\rho z'' - 2\rho' z')}{\rho^3},$$

$$F = \frac{\rho' z'' - \rho'' z'}{\rho} + \frac{K^2 z'^3}{\rho^4}.$$

Soit r le rayon de courbure de la méridienne,

$$r = \frac{\varepsilon\sigma'^3}{\rho' z'' - z'\rho''};$$

$\varepsilon = +1$ si la concavité de la méridienne est tournée vers l'axe, sinon $\varepsilon = -1$;

$$F = \frac{\varepsilon\sigma'^3}{\rho r} + \frac{K^2 z'^3}{\rho^4},$$

$$\frac{z'}{\sigma'} = \frac{\rho}{N},$$

d'où

$$\frac{F}{\sigma'^3} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\varepsilon}{r} + \frac{K^2}{N^3}\right);$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{K^2+\rho^2}{(K^2+N^2)^3}}\left(\frac{\varepsilon N^3}{r} + K^2\right).$$

Telle est la formule qui donne la courbure en fonction de celle de la méridienne.

Applications. — 1° Pour la courbe considérée plus haut

$$x = \frac{\cos t}{t}, \qquad y = \frac{\sin t}{t}, \qquad z = \frac{1}{t},$$

on trouve

$$T = z^2 + 1, \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{z^2 + 1}{z^2(1 + 2z^2)^3}.$$

2° Pour la courbe

$$x = e^t, \qquad y = e^{-t}, \qquad z = t\sqrt{2},$$

$$R = T = \frac{(x + y)^2}{\sqrt{2}}.$$

Celle-ci est une hélice.

3° La courbe K

$$x = 1 - \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t - \sin t$$

est tracée sur un cylindre de révolution; l'axe de la courbe est une génératrice du cylindre. Elle se projette sur xOz suivant une cycloïde et donne

$$T = 2x + 1, \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^3}.$$

4° La courbe

$$x = e^t \cos t, \qquad y = e^t \sin t, \qquad z = e^{2t}$$

est une courbe K sur paraboloïde de révolution

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1 + 4z}{2z(1 + 2z)^3}.$$

II. — Courbes K qui sont des hélices.

J'écris que

$$\frac{T}{R} = \text{const.} = m$$

et j'ai

$$\left(\frac{K^2+\rho^2}{K^2+N^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{N^3}{Kr}-K\right)=m\rho \qquad \text{si} \qquad \varepsilon=-1.$$

Ce que j'ai dit à propos de l'hyperboloïde me conduit à poser

$$M=\frac{N^2+K^2}{\rho^2}$$

ou, en prenant z comme variable,

$$M=\frac{K^2}{\rho^2}+1+\rho'^2,$$

$$M'=\frac{2K\rho'}{\rho^3}\left(\frac{N^3}{Kr}-K\right).$$

L'équation à intégrer devient

$$\left(\frac{K^2+\rho^2}{K^2+N^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2Km}{\rho^2}\frac{d\rho}{dn}$$

ou

$$\frac{(K^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{3}{2}}}=2Km\rho\frac{d\rho}{dn}.$$

Les variables se séparent et l'on a

$$(6) \qquad \frac{Km}{\sqrt{K^2+\rho^2}}+\frac{\varepsilon\rho}{\sqrt{N^2+K^2}}=C,$$

qui définit la méridienne par une relation entre ρ et N. Nous allons retrouver la formule (6) par une méthode différente.

Équations des courbes K qui sont des hélices.

Supposons que l'axe hélical ait ses cosinus directeurs proportionnels à α, o, γ. La normale au plan osculateur doit faire un angle constant avec cette direction,

ce qui donne une équation de la forme

$$\rho^2 + K^2 = \frac{(\alpha y + \gamma K)^2}{\cos^2 \lambda}.$$

Nos courbes se projettent donc sur le plan des xy suivant une conique, ellipse, hyperbole ou parabole. Comme tout ceci doit être connu, j'indique simplement les résultats.

Premier cas. — La projection est une ellipse d'axes $2a$, $2b$:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

L'axe focal doit rencontrer Oz; ici c'est Oy.

La courbe K, qui est une hélice, a pour équations

$$\begin{cases} x = b \cos t \\ y = a \sin t + h \\ z = \dfrac{ab}{K} t - \dfrac{bh}{K} \cos t \end{cases} \qquad (h > 0),$$

où

$$h = \frac{c}{b} \sqrt{b^2 + K^2}.$$

Pour la méridienne du plan des xz nous aurons

$$\begin{cases} x^2 = b^2 \cos^2 t + (a \sin t + h)^2, \\ z = \dfrac{ab}{K} t - \dfrac{bh}{K} \cos t. \end{cases}$$

On trouve facilement

$$\frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2 + K^2}} = \frac{c(a + h \sin t)}{c^2 \sin t + ah},$$

$\varepsilon = \pm 1$ suivant le signe de $a + h \sin t$,

$$\frac{K}{+\sqrt{x^2 + K^2}} = \frac{cK}{c^2 \sin t + ah}.$$

D'où

$$(6') \qquad \frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2+K^2}} + \frac{\frac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2+K^2}} = \frac{h}{c};$$

p, c'est le paramètre $\frac{b^2}{a}$.

Deuxième cas. — La projection est une hyperbole. L'axe focal rencontre Oz; ici c'est Oy. L'hélice K a pour équations

$$\begin{cases} x = b \operatorname{sh} t, \\ y = a \operatorname{ch} t + h, \\ z = -\frac{ab}{K} t - \frac{bh}{K} \operatorname{sh} t, \end{cases}$$

et la méridienne du plan des xz,

$$\begin{cases} x^2 = b^2 \operatorname{sh}^2 t + (a \operatorname{ch} t + h)^2, \\ z = \frac{abt + bh \operatorname{sh} t}{-K}. \end{cases}$$

On trouve facilement

$$\frac{x}{\pm\sqrt{N^2+K^2}} = \frac{c(a + h \operatorname{ch} t)}{c^2 \operatorname{ch} t + ah},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+K^2}} = \frac{c}{c^2 \operatorname{ch} t + bh},$$

d'où

$$(6'') \qquad \frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2+K^2}} + \frac{\frac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2+K^2}} = -\frac{h}{c}.$$

Troisième cas. — La projection est une parabole. Ce cas est tout particulièrement intéressant, puisque nous avons toutes les hélices cubiques.

Elles ont pour équations

$$\begin{cases} x = 2pt, \\ y = 2pt^2 + h, \\ z = \dfrac{4p^2}{3K} t^3 - \dfrac{2ph}{K} t, \end{cases}$$

$$K = + \sqrt{p^2 + 2ph}.$$

La méridienne a pour équations

$$\begin{cases} x^2 = 4p^2 t^4 + 4p(p+h)t^2 + h^2, \\ z = \dfrac{2pt}{3K}(2pt^2 - 3h). \end{cases}$$

On trouve

$$\frac{p - 2h}{\sqrt{x^2 + K^2}} = \frac{p + 2h}{2pt^2 + p + h},$$

$$\frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2 + K^2}} = \frac{2pt^2 - h}{2pt^2 + p + h},$$

d'où

$$(6''') \qquad \frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2 + K^2}} + \frac{\dfrac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2 + K^2}} = +1.$$

Réciproquement, il est facile d'intégrer cette équation et de retrouver la méridienne.

En résumé, les méridiennes sont caractérisées par l'équation intrinsèque :

Projection ellipse.... $\dfrac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2 + K^2}} + \dfrac{\dfrac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2 + K^2}} = \dfrac{h}{c} \quad (h > c)$

Projection hyperbole. $\dfrac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2 + K^2}} + \dfrac{\dfrac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2 + K^2}} = -\dfrac{h}{c} \quad (h < c)$

Projection parabole.. $\dfrac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2 + K^2}} + \dfrac{\dfrac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2 + K^2}} = 1$

Exemple. — Pour la cubique hélicale :

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2} \\ z &= \frac{t^3}{12} - \frac{3t}{4} \end{aligned}\right\} \quad \text{d'axe } Oz.$$

La méridienne est (comme toujours dans le plan des xz)

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{t^4 + 10t^2 + 9}{4}, \\ z &= \frac{t(t^2 - 9)}{12}, \qquad K = 2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose $x > 0$,

$$\frac{x}{\sqrt{N^2 + K^2}} = \frac{t^2 - 3}{t^2 + 5} \qquad \text{si} \qquad t > \sqrt{3},$$

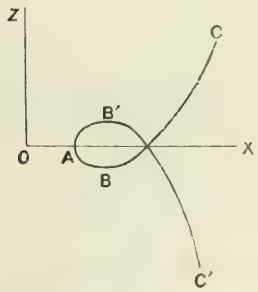
$$\frac{K}{\sqrt{x^2 + K^2}} = \frac{4}{t^2 + 5}.$$

On a donc

$$\frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2 + K^2}} + \frac{2K}{\sqrt{x^2 + K^2}} = +1;$$

$$\varepsilon = +1$$

Fig. 3.



sur l'arc BC et B'C' (*fig.* 3),

$$\varepsilon = -1$$

sur l'arc B'AB.

III. — Étude des méridiennes algébriques.

Les hélices cubiques sont les courbes tracées suivant la loi

$$\operatorname{tang} V = \frac{K}{N}$$

sur les surfaces de révolution dont la méridienne a pour équations

$$(7) \qquad \begin{cases} x^2 = 4p^2t^2 + (2pt^2 + h)^2, \\ z = \dfrac{2pt}{3K}(2pt^2 - 3h). \end{cases}$$

Ce sont ces méridiennes que je me propose d'étudier. Si l'on élimine t entre les équations qui précèdent, on trouve

$$(8) \qquad Az^4 + z^2(Bx^2 + C) + F(x) = 0,$$

où

$$F(x) \equiv 4p^2(x^2 - h^2)[x^2 - h(h + 3d)]^2.$$

J'ai posé pour abréger

$$d = 2p + 5h,$$
$$A = -81K^4,$$
$$B = -54pK^2(d + h),$$
$$C = +18pK^2(3dh^2 + 3h^3 + 3d^2h - d^3).$$

La forme (8) met de suite en évidence deux points doubles sur $x'x$. La courbe admet évidemment Ox, Oz pour axes de symétrie.

Si l'on traite l'équation (8) comme une équation du deuxième degré en z^2 et qu'on forme le discriminant, on trouve à un facteur constant près qui est positif l'expression

$$(x^2 + d^2 - h^2)^2(x^2 + K^2).$$

La présence du carré nous indique encore des points

doubles imaginaires, parce que

$$h^2 - d^2 < 0.$$

On a ainsi quatre points doubles imaginaires; donc six points doubles à distance finie. Enfin à l'infini nous trouvons un point double dans la direction Oz; la droite de l'infini touche la courbe en six points confondus.

Enfin aux points de rencontre imaginaires de la courbe avec l'axe des z le rayon de courbure égale $\pm Ki$.

Les points doubles sur $x'x$ peuvent venir se confondre en O; c'est ce qui arrive par exemple avec la méridienne unicursale

$$\begin{cases} x = 3t\sqrt{1+t^2}, \\ z = 2t^3, \end{cases}$$

qui admet six foyers sur Ox et six sur Oz.

Sur Ox leurs abscisses sont données par l'équation

$$4x^3 + 2x \pm 7 = 0,$$

ce qui donne deux foyers réels sur $x'x$.

Toutes ces propriétés peuvent être établies encore plus facilement en partant des formules (7).

Note. — Pour l'étude de la loxodrome sphérique j'ai pris les formules suivantes qui me paraissent particulièrement commodes; r désigne le rayon de la sphère :

$$x = r\frac{\cos t}{\operatorname{ch} mt},$$

$$y = r\frac{\sin t}{\operatorname{ch} mt},$$

$$z = r\frac{\operatorname{sh} mt}{\operatorname{ch} mt}.$$

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Définir les éléments de l'orbite d'une étoile double.*

Exposer, au choix, une méthode, graphique ou analytique, permettant de déterminer ces éléments.

Épreuve pratique. — *On a observé au méridien le passage du centre du Soleil et sa déclinaison, le* 1er *avril et le* 1er *juin* 1900, *et l'on a trouvé :*

Différence des ascensions droites à ces deux jours.	$3^h 53^m 59^s,53$
Déclinaison le 1er avril	$4^\circ 28' 31'',7$
» le 1er juin	$22^\circ\ 1' 58'',3$

On demande de calculer l'obliquité de l'écliptique.

(Juillet 1908.)

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *Sur une formule de cubature.* — La formule (1), dite *de Sarrus,* que M. Fontené vient de rappeler récemment dans votre Journal (septembre 1908, p. 385), est également vraie pour tout solide dans lequel l'aire de la section parallèle à un plan fixe, au lieu d'être une fonction du second degré de la cote, en est une du troisième.

Cela résulte de ce que la même formule de Cotes s'applique pour la quadrature d'une fonction de degré $2n$ et pour une de degré $2n+1$ (bien que dans les Traités d'Analyse on donne une formule spéciale à $m+1$ termes pour chaque degré m). Cette remarque qu'il est très facile d'établir directement, comme je le fais voir dans mon *Calcul graphique et Nomo-*

graphie (p. 98), se déduit aussi d'un théorème que j'ai énoncé dans les *Nouvelles Annales* sous forme de la question 2018 (1905, p. 240, résolue même année, p. 527).

Mais, si l'on n'a en vue que la formule de cubature ici en question, la vérification est immédiate. Elle se résume à remarquer que non seulement pour $m = 1$ et $m = 2$, mais encore pour $m = 3$, on a bien

$$\frac{1}{m+1} = \frac{1 + 2^{m-2}}{6.2^{m-2}}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2092.

(1908, p. 143.)

D'un point M *variable d'une parabole de sommet* O *on abaisse les deux normales dont les pieds sont* P *et* Q. *Il existe une parabole tangente aux côtés du triangle* MPQ *et ayant son foyer en* O. *Le lieu du point de rencontre de la droite* OM *avec la directrice de cette parabole est une ellipse.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soit

$$u^2 + v^2 + w(\alpha u + \beta v) = 0$$

la parabole inscrite dans le triangle MPQ ayant pour foyer le point O.

Soient

$$x = t^2,$$
$$y = t\sqrt{2p}$$

les coordonnées de M.

L'équation aux coefficients angulaires des normales MP, MQ est

$$m^2 - \frac{2t}{\sqrt{2p}} m + 2 = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues de M à la parabole est

$$m^2(\alpha t^2 - 1) - mt(\beta t + \alpha\sqrt{2p}) + \beta t\sqrt{2p} - 1 = 0.$$

Identifions ces deux équations, il vient

$$\alpha = -\frac{1}{2p}, \qquad \beta = -\frac{p + t^2}{tp\sqrt{2p}};$$

la directrice de la parabole a pour équation

$$\alpha x + \beta y - 2 = 0$$

ou

$$\frac{x}{2p} + y\frac{t^2 + p}{tp\sqrt{2p}} + 2 = 0;$$

la droite OM,

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{\sqrt{2p}};$$

éliminons t, il vient

$$3x^2 + 2y^2 + 4px = 0.$$

Autre solution analytique par M. Pélissier. Solution géométrique par M. Clapier.

2093.

(1908, p. 143.)

Étant donné un triangle $\alpha\beta\gamma$, *une transversale rencontre les côtés* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *en* M, N, P, *et l'on considère sur* $\beta\gamma$ *le segment* AD *de milieu* M *dont les extrémités* A *et* D *divisent harmoniquement* $\beta\gamma$, *sur* $\gamma\alpha$ *le segment analogue* BE, *sur* $\alpha\beta$ *le segment analogue* CF ; *les six points* A, D, B, E, C, F *sont les sommets d'un quadrilatère complet. Si la droite* MNP *reste tangente à une conique* S *circonscrite au triangle* $\alpha\beta\gamma$, *chacun des quatre côtés* DEF, DBC, ECA, FAB *du quadrilatère complet passe par un point fixe, et les quatre points obtenus sont les sommets d'un quadrangle dont* $\alpha\beta\gamma$ *est le triangle diagonal. Examiner le cas particulier où la conique* S *est le cercle circonscrit au triangle* $\alpha\beta\gamma$. (*Sur ce cas particulier, voir* Koehler, *Exercices*, p. 177.)

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. PARROD.

Soient m, n, p et a, b, c les coordonnées homogènes de M, N, P et A, B, C ; celles de D, E, F sont $-a$, $-b$, $-c$.

On a

$$m = a^2, \qquad n = b^2 \qquad \text{et} \qquad p = c^2.$$

Or

$$m.n.p = 1;$$

donc

$$a.b.c = \pm 1;$$

La première partie est ainsi établie.

En prenant pour triangle de référence $\alpha\beta\gamma$, l'équation tangentielle de la conique est

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0;$$

l'équation de la droite MNP étant

$$ux + vy + wz = 0,$$

on a

$$\frac{w}{v} = km, \qquad \frac{u}{w} = hn.$$

k et h sont des nombres qui ne dépendent que des éléments du triangle de référence. Portons les valeurs de u et v dans l'équation de la conique, on a

$$ab\sqrt{h.k} + a\sqrt{k} + 1 = 0;$$

donc le côté AB passe par un point fixe; de même pour les trois autres côtés.

Lorsque la droite MN est tangente en α, les points B, C, E et F sont confondus en α, et les points fixes par lesquels passent les côtés BC et EF sont alignés sur α; donc $\alpha\beta\gamma$ est le triangle diagonal du quadrangle de ces points fixes.

Quand la conique est le cercle circonscrit, les quatre points fixes sont évidemment les quatre centres des cercles inscrit et exinscrits.

Autres solutions par MM. BOUVAIST et SONDAT.

2094.

(1908, p. 144.)

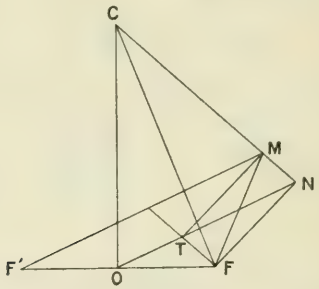
Démontrer que les cercles bitangents à une hyperbole et ayant leur centre sur l'axe non transverse sont vus d'un foyer sous angle fixe.

(M. Tétu.)

SOLUTION

Par M. F. Boulad.

Soient C le centre d'un cercle bitangent à une hyperbole de centre O et M son point de contact avec la branche du côté d'un foyer F de cette hyperbole. Il suffit de prouver que le rapport du rayon CM de ce cercle à la distance CF est con-



stant. Pour cela, projetons le foyer F respectivement en T et N sur la tangente et la normale en M. Je dis que les deux angles $\widehat{FTO}$ et $\widehat{TOF}$ du triangle FTO sont respectivement égaux aux angles $\widehat{FMC}$ et $\widehat{MCF}$ du triangle FMC.

En effet, on sait que les trois points O, T et N sont situés sur une droite parallèle au rayon vecteur F'M. Comme l'angle $\widehat{NTF}$ = l'angle $\widehat{FMN}$, leurs suppléments $\widehat{FTO}$ et $\widehat{FMC}$ sont égaux. En outre, le quadrilatère FOCN, ayant ses deux angles opposés O et N droits, est inscriptible dans un cercle. On a, par suite,

$$\text{angle } \widehat{NOF} = \text{angle } \widehat{NCF}.$$

Il s'ensuit que les deux triangles FMC et FTO sont sem-

blables et donnent

$$\frac{MC}{FC} = \frac{TO}{OF} = \frac{a}{c}.$$

Autres solutions par MM. Barisien, Betto, Bouvaist, Bros, Parrod, Pélissier.

2095.

(1908, p. 240.)

Si deux quadriques ont en commun deux génératrices Ox, Oy, *le long desquelles elles se raccordent, elles ont en* O *un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'une perpendiculaire au plan* xOy *rencontre les deux quadriques en deux points* M *et* M′, *dont la distance est un infiniment petit du quatrième ordre en prenant* OM *comme infiniment petit principal.*

(G. F.)

SOLUTION

Par M. Tétu.

Prenons pour axes de coordonnées Ox, Oy et la perpendiculaire Oz menée par O au plan xOz. Les équations des deux quadriques sont

$$\lambda z^2 + 2Ayz + 2Bzx + 2Cxy + 2Dz = 0,$$
$$\lambda' z^2 + 2Ayz + 2Bzx + 2Cxy + 2Dz = 0.$$

Je vais montrer que les sections par des plans passant par Oz sont des coniques ayant en O un contact du troisième ordre. Coupons par $y = mx$, les projections des coniques sur xOz sont

$$\lambda z^2 + 2(Am + B)xz + 2Cmx^2 + 2Dz = 0,$$
$$\lambda' z^2 + 2(Am + B)xz + 2Cmx^2 + 2Dz = 0,$$

équations qui représentent deux coniques ayant en O quatre points communs confondus.

QUESTIONS.

2115. Si l'on définit un tétraèdre SABC en donnant les faces λ, μ, ν du trièdre S et les longueurs α, β, γ des arêtes issues de S, le tétraèdre est orthocentrique sous les deux conditions

$$\frac{\alpha}{\cos\lambda} = \frac{\beta}{\cos\mu} = \frac{\gamma}{\cos\nu}.$$

Cela étant, dans un tétraèdre orthocentrique ABCD dont H est l'orthocentre, on donne les valeurs algébriques α, β, γ, δ des segments $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, $\overline{HD}$, le sens positif sur chaque hauteur allant de la base vers le sommet : déterminer la valeur commune des rapports égaux

$$\frac{\cos(b, c)}{\delta\alpha} = \frac{\cos(c, a)}{\delta\beta} = \frac{\cos(a, b)}{\delta\gamma} = \frac{\cos(d, a)}{\beta\gamma} = \ldots = \ldots,$$

la notation (b, c) indiquant le dièdre relatif aux plans des faces b et c, ... (G. Fontené.)

2116. Soient $A_1, A_2, \ldots$ des points fixes dans l'espace, et $O\Delta_1$, $O\Delta_2, \ldots$ un système de demi-droites qu'on déplace de toutes les manières possibles autour du point O sans le déformer. Aux points $A_1, A_2, \ldots$ on applique des vecteurs $V_1, V_2, \ldots$ *de grandeurs déterminées* parallèlement aux demi-droites $O\Delta_1$, $O\Delta_2$, ... Déterminer l'ordre du complexe formé par les axes centraux des systèmes de vecteurs ainsi obtenus (1).

Si l'on impose la condition que les vecteurs aient une résultante, le complexe est remplacé par la congruence des droites qui portent les résultantes : déterminer l'ordre et la classe de cette congruence.

Même question, si l'on impose la condition que le système des vecteurs ait un moment donné par rapport à un axe parallèle à la résultante générale. (G. Fontené.)

(1) M. d'Ocagne a montré que, *dans le plan,* la résultante des vecteurs V passe par un point fixe. Il en est de même dans l'espace pour des vecteurs parallèles.

[K13cα]

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DU TÉTRAÈDRE;

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette Note est une contribution à la Géométrie *élémentaire* du tétraèdre. J'indiquerai toutefois les faits généraux, donnés par la Géométrie analytique, qui dominent les faits particuliers dont j'aurai à m'occuper.

Je signale à l'attention des lecteurs du Journal un fait de situation (fin du n° 12) que j'ai pu établir seulement pour un tétraèdre ayant un trièdre trirectangle, mais qui reste très probablement exact pour un tétraèdre simplement orthocentrique.

PREMIÈRE PARTIE.

TÉTRAÈDRES QUELCONQUES.

1. Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux quadriques conjuguées à un tétraèdre donné et passant par un point donné est une surface du troisième ordre passant par les arêtes du tétraèdre (PAINVIN). Voici un cas particulier. Les quadriques qui passent par les centres des huit sphères inscrites à un tétraèdre ABCD ont pour équation générale, si on les rapporte à ce tétraèdre,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$

sous la condition

$$a + b + c + d = 0;$$

ces quadriques sont les hyperboloïdes équilatères qui admettent comme tétraèdre conjugué le tétraèdre ABCD (Salmon, p. 256). Le lieu des centres de ces quadriques est la surface qui a pour équation

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} + \frac{D}{t} = 0.$$

A, B, C, D étant les aires des faces du tétraèdre ; cette surface est le lieu des points dont les projections orthogonales sur les plans des faces du tétraèdre sont dans un même plan. (A. Sartiaux, *Nouvelles Annales*, 1864, p. 370.)

Parmi les quadriques considérées, il s'en trouve une ayant pour centre le milieu de la droite qui joint deux quelconques des huit points en question, attendu que ces points forment un système de Lamé ; on arrive ainsi à ce résultat :

Les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre quelconque sont sur une même surface du troisième ordre qui contient les arêtes du tétraèdre.

(Beltrami, *N. A.*, 1863, p. 336.)

Les pieds des perpendiculaires abaissées de l'un de ces points milieux sur les plans des faces du tétraèdre sont dans un même plan.

(A. Sartiaux, *N. A.*, 1864, p. 367.)

Il va sans dire que l'idée de rattacher le théorème de Beltrami au théorème de Painvin n'est pas nouvelle.

(*N. A.*, 1864, p. 225 et 1865, p. 74.)

2. Avant de démontrer géométriquement le théorème énoncé en dernier lieu, je rappelle que *les huit sphères*

tangentes aux plans des faces d'un tétraèdre forment deux systèmes bien distincts : l'un des systèmes est formé de la sphère inscrite et des trois sphères inscrites dans les espaces nommés *combles* (nombre pair de plans bissecteurs extérieurs) ; l'autre système est formé des quatre autres sphères (nombre impair de plans bissecteurs extérieurs). Les centres des huit sphères forment ainsi deux tétraèdres

$$(I, I', I'', I''') \quad \text{et} \quad (I_1, I_2, I_3, I_4).$$

D'une part, chacune des *douze* arêtes de ces deux tétraèdres rencontre deux arêtes opposées du tétraèdre primitif ;

D'autre part, chacune des *seize* droites qui joignent l'un des points I, I', I'', I''' à l'un des points I_1, I_2, I_3, I_4 passe par un sommet du tétraèdre primitif.

On a bien ainsi vingt-huit droites.

Soient I et J les centres des deux sphères que l'on considère, et qui peuvent appartenir à des systèmes différents ou à un même système ; soit K le milieu de IJ. Introduisons les deux cônes, de sommets S et S', qui sont circonscrits à la fois aux deux sphères ; les plans des quatre faces du tétraèdre sont tangents à l'un ou à l'autre de ces deux cônes (soit qu'il y ait trois plans tangents à l'un des cônes et un plan tangent à l'autre, soit qu'il y ait deux plans tangents à l'un des cônes et deux plans tangents à l'autre). On doit prouver que les projections du point K, milieu de IJ, sur les plans tangents à l'un quelconque des deux cônes, sont dans un même plan ; or, si l'on coupe le système des deux sphères et des deux cônes par un plan contenant la droite IJ, le fait à établir se réduit au fait analogue de géométrie plane, et celui-ci résulte du théorème de Simpson. *Le plan qui contient les projections*

du point K *est d'ailleurs perpendiculaire à la droite* IJ.

3. Relativement à ce dernier fait, qui ressort de la démonstration donnée, je ferai la remarque suivante. La surface du troisième ordre considérée ici est en même temps le lieu d'un point M dont le point inverse est rejeté à l'infini, c'est-à-dire que la droite inverse de la droite AM par rapport au trièdre A, et les trois droites analogues, sont parallèles ; *le plan qui contient les projections du point* M *est perpendiculaire à la direction de ces droites.* (Cette remarque donne même une démonstration du fait qu'un point M dont les coordonnées vérifient l'équation de la surface à ses projections sur les plans des faces du tétraèdre situées dans un même plan.)

Dès lors, si l'on prend comme point M le milieu K du segment IJ, lorsque les centres I et J sont alignés avec le point A (sphères appartenant à des systèmes différents), la droite AIKJ est sa propre inverse par rapport au trièdre A, et le plan qui contient les projections du point K est perpendiculaire à cette droite.

4. *Si le tétraèdre est orthocentrique, son orthocentre étant* H, *le plan qui contient les projections du point* M *partage le segment* MH *dans le rapport de* 1 *à* 2. Cette propriété, que j'avais indiquée sous forme de question, a été établie par M. R. Bouvaist (*N. A.*, 1906, p. 479) de la manière suivante : Pour un tétraèdre quelconque, deux points inverses sont les foyers d'une quadrique de révolution inscrite, les projections des deux points sur les plans des faces étant sur une même sphère qui est la sphère principale de

la quadrique. La surface du troisième ordre considérée, surface inverse du plan de l'infini, est le lieu des foyers des paraboloïdes de révolution inscrits au tétraèdre, les plans qui contiennent les projections des points de la surface sur les plans des faces du tétraèdre étant les plans tangents au sommet de ces paraboloïdes. Or on sait que le plan orthoptique d'un paraboloïde inscrit à un tétraèdre orthocentrique passe par l'orthocentre de ce tétraèdre (*voir*, par exemple, Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 118); la proposition énoncée résulte de là, la distance du sommet d'un paraboloïde elliptique au plan orthoptique étant $\frac{p+q}{2}$, ce qui donne p pour un paraboloïde de révolution.

Nous aurons l'occasion d'appliquer cette propriété au point K, milieu du segment IJ, les points I et J étant en ligne droite avec le point A (sphères appartenant à des systèmes différents); il serait intéressant d'en avoir une démonstration élémentaire.

DEUXIÈME PARTIE.

I. — Géométrie plane. Triangles.

5. Un cercle U et une conique V étant donnés, la condition d'existence de triangles inscrits à U et conjugués à V, ou de triangles circonscrits à V et conjugués à U, est que le cercle U soit orthogonal au cercle orthoptique de la conique V (Steiner et Faure). Considérons alors, pour un triangle ABC :

Le cercle circonscrit, de centre O et de rayon R,
Le cercle inscrit, de centre I et de rayon r,
Le cercle conjugué, de centre H et de rayon ρ,

ce dernier étant d'abord supposé réel; en prenant

pour U et V les cercles O et H, puis les cercles O et I, on peut dire :

Le cercle circonscrit à un triangle obtusangle est orthogonal au cercle orthoptique du cercle conjugué à ce triangle.

Le cercle conjugué à un triangle obtusangle est orthogonal au cercle orthoptique du cercle inscrit à ce triangle.

On a les formules

$$\overline{OH}^2 = R^2 + 2\rho^2,$$
$$\overline{HI}^2 = \rho^2 + 2r^2.$$

6. Les pieds des hauteurs étant P, Q, R, posons

$$(H) = \overline{HA} \times \overline{HP} = \overline{HB} \times \overline{HQ} = \overline{HC} \times \overline{HR}.$$

Dans le cas d'un triangle obtusangle on a $\rho^2 = (H)$. On peut donc écrire pour un triangle quelconque, en vertu du principe de continuité,

$$(1) \qquad \overline{OH} = R^2 + 2(H),$$
$$(2) \qquad \overline{IH}^2 = 2r^2 + (H).$$

La formule (1) est facile à établir géométriquement : il suffit de considérer la puissance du point H par rapport au cercle circonscrit, cette puissance étant $\overline{HA} \times 2\overline{HP}$.

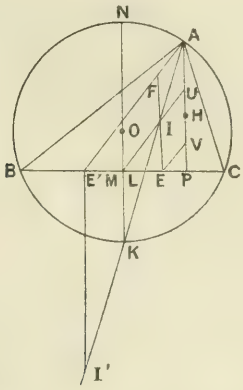
Pour démontrer géométriquement la formule (2), nous écrirons (*fig.* 1)

$$\begin{aligned}\overline{IH}^2 &= \overline{AI}^2 + \overline{AH}^2 - 2AH(AP - r)\\ &= \overline{AI}^2 - AH(AP - 2r) - AH.HP\\ &= \overline{AI}^2 - AH(AP - 2r) + (H).\end{aligned}$$

Or, le point A étant centre d'homothétie directe des

cercles I et I', on a sur la figure EI = IF = r, de sorte

Fig. 1.



que MI est parallèle à E'F ; on a donc, dans les triangles semblables AUI et KMI,

$$\frac{AI}{r} = \frac{KI}{KM},$$

d'où

$$\frac{\overline{AI}^2}{r^2} = \frac{KA.KI}{KM^2} = \frac{KM.KN}{KM^2} = \frac{KN}{KM}.$$

D'autre part, pour faire intervenir AP — $2r$, menons EV parallèle à MU ; on a

$$\frac{PV}{EI} = \frac{EV \text{ ou } IU}{MI} = \frac{UA}{KM},$$

ou

$$\frac{AP - 2r}{r} = \frac{r}{KM}.$$

On a donc

$$\overline{IH}^2 = r^2 \frac{KN - AH}{KM} + (H)$$

ou, en remplaçant AH par 2 OM,

$$\overline{IH}^2 = 2r^2 \frac{OK - OM}{KM} + (H) = 2r^2 + (H).$$

7. Si l'on élimine (H) entre les relations (1) et (2), on a

$$\overline{OH}^2 - 2\overline{IH}^2 = R^2 - 4r^2;$$

or, le cercle des neuf points ayant son centre Ω au milieu de OH, le théorème de la médiane donne, dans le triangle IOH,

$$\overline{IO}^2 - \overline{IH}^2 = 2\overline{I\Omega}^2 - \frac{\overline{OH}^2}{2},$$

et la relation précédente donne

$$2\overline{IO}^2 - 4\overline{I\Omega}^2 = R^2 - 4r^2;$$

en tenant compte de la formule d'Euler,

$$OI^2 = R^2 - 2Rr,$$

on a donc

$$(R - 2r)^2 = 4\overline{\Omega I}^2,$$

ou, à cause de $R > 2r$,

$$\Omega I = \frac{R}{2} - r;$$

on vérifie ainsi le théorème de Feuerbach.

Si l'on considère les triangles inscrits à un cercle O et circonscrits à un cercle I, le lieu des centres Ω des cercles des neuf points de ces triangles est un cercle de centre I; le lieu des orthocentres est un cercle ayant son centre sur la droite OI, comme on le voit directement par la formule (3); le lieu des centres de gravité est de même un cercle ayant son centre sur la droite OI.

8. Les formules (1) et (2), avec leurs conséquences, restent applicables en remplaçant le cercle inscrit par un cercle exinscrit. La démonstration du n° 6 subirait seulement de légères modifications, et, au n° 7,

r serait changé en $-r$. Le fait suivant, qui est un fait d'inégalité, concerne seulement le cercle inscrit.

Le centre du cercle INSCRIT *à un triangle est intérieur au cercle décrit sur* GH *comme diamètre, ou encore l'angle* $\widehat{GIH}$ *est obtus.*

On a en effet

$$\overline{OI}^2 = 2R\left(\frac{R}{2} - r\right), \qquad \overline{\Omega I}^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2,$$

et par suite (en écartant le cas du triangle équilatéral)

$$\frac{\overline{OI}^2}{\overline{\Omega I}^2} = \frac{2R}{\frac{R}{2} - r} > 4, \qquad \frac{OI}{\Omega I} > 2;$$

comme les points G et H divisent le segment $O\Omega$ dans le rapport de 2 à 1, le lieu des points pour lesquels on a $\frac{OM}{\Omega M} = 2$ est le cercle décrit sur GH comme diamètre : donc le point I est intérieur à ce cercle.

(Le cercle décrit sur GH comme diamètre est connu dans la théorie du triangle; il fait partie du même faisceau que le cercle circonscrit, le cercle des neuf points, le cercle conjugué. On le rencontre dans l'étude du tétraèdre orthocentrique, à propos de la deuxième sphère des douze points : cette sphère contient, pour chaque face, le cercle qui a pour diamètre la droite joignant le centre de gravité de cette face à son orthocentre.)

II. — Géométrie dans l'espace. Tétraèdres orthocentriques.

9. L'extension à l'espace du théorème de Steiner et Faure donne pour un tétraèdre orthocentrique ABCD

les résultats suivants. Les pieds des hauteurs étant P, Q, R, S, si l'on pose

$$(H) = \overline{HA} \times \overline{HP} = \overline{HB} \times \overline{HQ} = \ldots = \ldots,$$

on a

$$(1) \qquad \overline{OH}^2 = R^2 - 3(H).$$

$$(2) \qquad \overline{IH}^2 = 3r^2 + (H).$$

La formule (1) est facile à établir géométriquement; il suffit de considérer la puissance du point H par rapport à la sphère circonscrite, cette puissance étant $\overline{HA} \times 3\overline{HP}$: la sphère circonscrite est en effet directement homotétique à la seconde sphère des douze points (sphère PQRS), le centre d'homothétie étant H et le rapport d'homothétie étant 3.

Pour démontrer géométriquement la formule (2), nous emploierons la figure 2 dans laquelle le point K est, par construction, le milieu de II', et la droite AN est, par construction, perpendiculaire à la droite AK ; la droite MT est aussi perpendiculaire à la droite AK, et l'on a (*voir* plus loin) HT = 2KM.

On a d'abord, comme au n° 6, K étant le milieu de II' et l'angle KAN étant droit par construction,

$$\overline{IH}^2 = r^2 \frac{KN - AH}{KM} + (H);$$

pour achever le calcul, nous menons la droite MT perpendiculaire à la droite AK, et nous écrivons

$$\frac{KN - AH}{KM} = \frac{KM + HT}{KM};$$

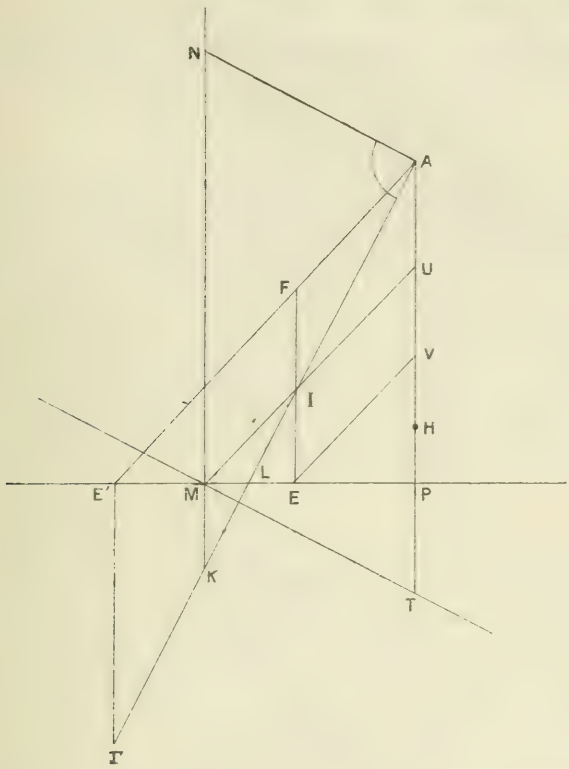
la formule (2) sera établie si l'on prouve qu'on a

$$HT = 2KM.$$

Or cela résulte de ce qu'on a vu au n° 4, la droite MT

étant la trace sur le plan de la figure du plan qui con-

Fig. 2.



tient les projections du point K sur les plans des faces du tétraèdre.

10. Si l'on élimine (H) entre les relations (1) et (2), on a

$$\overline{OH}^2 - 3\,\overline{IH}^2 = R^2 - 9r^2; \tag{3}$$

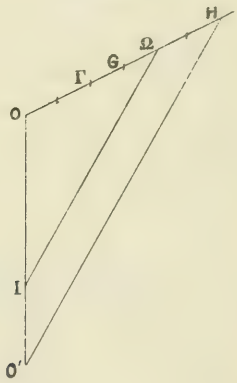
mais on n'a plus ici l'analogue de la formule de géomé-

trie plane, $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$, et, par exemple, la seconde sphère des douze points, dont le centre Ω est au tiers du segment HO et dont le rayon est $\frac{R}{3}$, n'est pas tangente à la sphère inscrite : ce contact exigerait, comme on le verra plus loin, la condition

$$\overline{OI}^2 = (R - 3r)(R + r).$$

On peut toutefois déduire de la formule (3) des conséquences intéressantes. Étant données deux sphères (O, R) et (I, r), dont la seconde est supposée intérieure à la première, il existe une double infinité de tétraèdres orthocentriques inscrits à la première et circonscrits à la seconde. D'après la relation (3), le lieu de l'orthocentre H est une sphère ayant pour centre un point O′ situé sur le prolongement de OI (*fig.* 3)

Fig. 3.



et tel que l'on ait $\frac{O'I}{O'O} = \frac{1}{3}$. Si l'on considère la deuxième sphère des douze points du tétraèdre, celle qui passe par les centres de gravité des faces, par les pieds des

hauteurs du tétraèdre, etc., le centre Ω de cette sphère est situé au tiers de HO, et l'on arrive à ce résultat :

Étant données deux sphères (O, R) *et* (I, r), *dont la seconde est supposée intérieure à la première, il existe une double infinité de tétraèdres orthocentriques inscrits à la première et circonscrits à la seconde ; le lieu des centres* Ω *des deuxièmes sphères des douze points de ces tétraèdres est une sphère concentrique à la sphère inscrite* (I, r). Ces sphères des douze points ont d'ailleurs même rayon $\frac{R}{3}$.

On a marqué sur la figure 3, outre les points O, H, Ω, le centre de gravité G du tétraèdre et le point de concours Γ des perpendiculaires aux faces menées par leurs centres de gravité : dans les conditions qui viennent d'être indiquées, chacun des quatre points H, Ω, G, Γ se déplace sur une sphère ayant naturellement son centre sur la droite OI.

[Par analogie avec un théorème de géométrie plane dû à Burnside, on peut démontrer que le lieu de l'orthocentre d'un tétraèdre orthocentrique, inscrit à une quadrique S′ et circonscrit à une quadrique S, est une quadrique passant par la courbe d'intersection de la quadrique S′ avec la sphère orthoptique de la quadrique S ; si la quadrique S′ est une sphère, le lieu est donc une sphère.]

11. Pour voir directement que le lieu du point Ω est une sphère de centre I, et pour calculer en même temps le rayon de cette sphère, il suffit, en imitant ce qui a été fait au n° 7, d'appliquer le théorème de Stewart aux trois obliques IO, IH, IΩ ; on a ainsi

$$\overline{IO}^2 + 2\overline{IH}^2 - 3\overline{I\Omega}^2 = \frac{2}{3}\overline{OH}^2,$$

et la relation (3) donne

$$(4) \qquad \overline{IO}^2 - 3\overline{I\Omega}^2 = \frac{2}{3}(R^2 - 9r^2);$$

si l'on donne OI, R et r, la distance IΩ est constante.

Les sphères Ω sont égales et ont leurs centres à une même distance du point I : on peut se demander à quelle condition elles seront tangentes à la sphère (I, r), comme cela a lieu sans condition en géométrie plane (théorème de Feuerbach). En remplaçant ΩI par $\frac{R}{3} \mp r$, afin d'embrasser le cas d'une sphère exinscrite, *on obtient la condition*

$$\overline{OI}^2 = (R \mp 3r)(R \pm r).$$

Pour obtenir deux sphères qui satisfassent à l'une de ces égalités, on peut partir d'une pyramide triangulaire régulière (deux paramètres), et prendre comme sphère O la sphère circonscrite, comme sphère I la sphère inscrite, ou la sphère exinscrite qui touche la base en son centre. Les deux sphères O et I étant ainsi choisies, tout tétraèdre orthocentrique inscrit à la première et circonscrit à la seconde a sa seconde sphère des douze points tangente à la sphère I ; deux de ces tétraèdres (celui duquel on part et un autre) sont des pyramides triangulaires régulières.

[La condition ci-dessus est indiquée à tort comme condition d'existence de tétraèdres inscrits à une sphère O et circonscrits à une sphère I, dans les *Annales de Gergonne* (t. XIV, p. 56); l'auteur suppose qu'il existe nécessairement, parmi ces tétraèdres, des pyramides triangulaires régulières, ce qui est évidemment inexact. Painvin, dans son *Traité de Géométrie analytique*, propose comme exercice la démonstration de cette formule, qu'il emprunte aux *Annales de Ger-*

gonne (p. 212, exercices 18 et 19). L'idée fausse que deux quadriques n'admettent de tétraèdres inscrits à l'une et circonscrits à l'autre que sous une condition invariante a d'ailleurs été reproduite depuis.]

Inégalités relatives au tétraèdre orthocentrique.

12. Les formules (1) et (2), avec leurs conséquences, restent applicables en remplaçant la sphère inscrite par une sphère exinscrite. Dans ce qui suit, il faut distinguer.

En appelant I le centre d'une sphère inscrite ou exinscrite, on a, par la formule (4),

$$\overline{I\Omega}^2 = \frac{\overline{IO}^2}{3} - \frac{2}{9}(R^2 - 9r^2).$$

1° (*a*). La sphère Ω enveloppera la sphère I si l'on a

$$\overline{I\Omega}^2 < \left(\frac{R}{3} - r\right)^2,$$

ou

$$\frac{\overline{IO}^2}{3} < \frac{2}{9}(R^2 - 9r^2) - \frac{1}{9}(R - 3r)^2,$$

ou

$$\frac{\overline{IO}^2}{3} < \frac{1}{9}(R - 3r)(3R + 3r),$$

ou enfin

$$(5) \qquad \overline{IO}^2 < (R - 3r)(R - r).$$

L'inégalité écrite tout d'abord exprime seulement que les sphères Ω et I sont l'une intérieure à l'autre ; d'après (5) on a $\frac{R}{3} > r$, et c'est bien la sphère Ω qui enveloppe la sphère I.

1° (*b*). Les deux sphères seront extérieures l'une à

l'autre si l'on a

$$(6) \qquad \overline{IO}^2 > (R - 3r)(R - r).$$

2° Enfin les deux sphères seront sécantes si l'on a

$$(7) \qquad (R - 3r)(R + r) < \overline{IO}^2 < (R - 3r)(R - r).$$

Ces conditions permettent d'établir le théorème suivant :

Dans un tétraèdre orthocentrique SABC *qui a un trièdre trirectangle (une condition)* :

1° (*a*). *La deuxième sphère des douze points enveloppe la sphère inscrite* [condition (5)];

1° (*b*). *Elle est extérieure à chacune des trois sphères exinscrites situées dans les combles* SA *ou* BC, SB *ou* CA, SC *ou* AB [condition (6)];

2° *Elle coupe les quatre sphères exinscrites situées dans les trièdres* S, A, B, C [condition (7)].

On remarquera que la première sphère des douze points n'a aucun point commun avec les quatre sphères du groupe formé par la sphère inscrite et les sphères exinscrites dans les combles, tandis qu'elle coupe les quatre sphères de l'autre groupe.

(Je pense qu'il en est de même pour un tétraèdre orthocentrique quelconque, mais je n'ai pas réussi à établir la démonstration. On trouvera plus loin une Note à ce sujet.)

13. Le trièdre S étant trirectangle, prenons comme axes de coordonnées les droites SA, SB, SC, et soit

$$SA = a, \qquad SB = b, \qquad SC = c.$$

Les coordonnées du point O sont

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{b}{2}, \quad \frac{c}{2},$$

et l'on a

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}.$$

1° (a). S'il s'agit de la sphère inscrite, les coordonnées du point I sont égales au rayon r, et l'on doit avoir, d'après (5),

$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - r\right)^2 + \ldots \leqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - 2Rr - 3r^2,$$

ou, en divisant par r,

$$(\alpha) \qquad 2R + 6r \leqq a + b + c;$$

on a d'ailleurs

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{abc}{bc + ca + ab + \sqrt{b^2c^2 + \ldots}} \\ &= \frac{bc + ca + ab - \sqrt{b^2c^2 + \ldots}}{2(a + b + c)}. \end{aligned} \right.$$

1° (b). Pour une sphère exinscrite située dans le comble AB, les coordonnées du centre I sont r, r, $-r$, et l'on doit avoir, d'après (6),

$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{c}{2} + r\right)^2$$
$$\geqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + 2Rr + 3r^2;$$

cette condition se déduit de celle du cas précédent en changeant r en $-r$, a en $-a$, b en $-b$, et en changeant le sens de l'inégalité; en divisant donc ici par $-r$, on obtient

$$(\alpha_1) \qquad 2R + 6r' \leqq a' + b' + c,$$

r' représentant $-r$, etc. On a d'ailleurs

$$r = \frac{abc}{ca + cb + ab - \sqrt{b^2c^2 + \ldots}}$$

ou

$$(\beta_1) \qquad r' = \frac{a'b'c}{ca' - cb' - a'b' + \sqrt{c^2a'^2 - \ldots}};$$

cette formule est celle du cas précédent, où l'on remplace également r, a, b par $-r$, $-a$, $-b$ ou r', a', b'. Il faut d'ailleurs observer ceci : d'après la formule (β_1), r' étant négatif, l'expression $ca' + cb' + a'b'$ est négative; comme on a aussi

$$r' = \frac{ca' + cb' + a'b' - \sqrt{c^2a'^2 + \ldots}}{2(a' + b' + c)},$$

la quantité $a' + b' + c$ est positive.

Si la sphère est dans le comble SC, les coordonnées du centre sont $-r$, $-r$, r, et l'on doit avoir

$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - r\right)^2 - \left(\frac{c}{2} - r\right)^2$$
$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} - 2Rr - 3r^2,$$

avec

$$r = \frac{-abc}{ca + cb - ab - \sqrt{b^2c^2 + \ldots}};$$

il faut donc, dans ce qu'on vient de dire, changer a en $-a$, b en $-b$, c en $-c$, et écrire

$$(\alpha_2) \qquad 2R + 6r' = a - b + c',$$

$$(\beta_2) \qquad r' = \frac{abc'}{c'a - c'b + ab - \sqrt{c'^2a^2 - \ldots}}.$$

La quantité $a - b + c'$ est d'ailleurs positive. En effet, si l'expression $c'a + c'b + ab$ est négative, comme on a aussi

$$r' = \frac{c'a + c'b + ab - \sqrt{c'^2a^2 - \ldots}}{2(a + b + c')},$$

le fait annoncé est exact. Si l'on a

$$c'a + c'b + ab > 0 \qquad \text{ou} \qquad c' > \frac{-ab}{a+b},$$

on a

$$a + b + c' > a + b - \frac{ab}{a+b} > 0.$$

2° Pour la sphère exinscrite située dans le trièdre S. les coordonnées du centre sont r, r, r, et l'on doit avoir d'une part

$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \ldots \geqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - 2Rr - 3r^2,$$

ou, en divisant par r,

$$(\gamma) \qquad 2R + 6r \leqq a + b + c,$$

avec

$$(\delta) \qquad \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{abc}{bc + ca + ab - \sqrt{b^2c^2 + \ldots}} \\ &= \frac{bc + ca + ab + \sqrt{b^2c^2 + \ldots}}{2(a + b + c)}. \end{aligned} \right.$$

On doit avoir d'autre part

$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \ldots \geqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + 2Rr - 3r^2;$$

cette condition se déduit de (γ) en changeant r, a, b, c en $-r$, $-a$, ..., et en changeant le sens de l'inégalité; en divisant donc ici par $-r$, on obtient

$$(\gamma_1) \qquad 2R + 6r' \leqq a' + b' + c';$$

on peut d'ailleurs écrire

$$(\delta_1) \qquad r' = \frac{b'c' + c'a' + a'b' + \sqrt{b'^2c'^2 + \ldots}}{2(a' + b' + c')}.$$

Pour une sphère exinscrite située dans le trièdre C, les coordonnées du point I sont r, r, $-r$, et l'on doit

avoir

$$\left(\frac{a}{2}-r\right)^2+\left(\frac{b}{2}-r\right)^2+\left(\frac{c}{2}+r\right)^2 \geqq \frac{a^2+b^2-c^2}{4}-2\mathrm{R}r-3r^2$$

$$\left(\frac{a}{2}-r\right)^2+\left(\frac{b}{2}-r\right)^2+\left(\frac{c}{2}+r\right)^2 \leqq \frac{a^2+b^2+c^2}{4}+2\mathrm{R}r-3r^2$$

$$r=\frac{abc}{bc+ca-ab+\sqrt{b^2c^2+\ldots}};$$

ces inégalités et cette formule ne diffèrent de celles du cas précédent que par le changement de c en $-c$; on aura donc l'écriture (γ, δ) ou l'écriture (γ_1, δ_1), avec c' au lieu de c ou c au lieu de c'.

14. Il suffira de vérifier que l'inégalité (α), avec la valeur (β) de r, et l'inégalité (γ), avec la valeur (δ) de r, sont exactes quels que soient les signes des quantités a, b, c, sauf toutefois l'hypothèse $a+b+c>0$ pour l'inégalité (α).

Considérons a, b, c comme les racines de l'équation

$$x^3-px^2+qx-r=0.$$

On doit avoir d'abord

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\frac{3(bc+ca+ab-\sqrt{b^2c^2+\ldots})}{a+b+c} \leqq a+b+c$$

ou, en multipliant par $a+b+c$ qui est supposé positif pour cette inégalité,

$$p\sqrt{p^2-2q}-3\sqrt{q^2-2pr} \leqq p^2-3q.$$

Le second membre étant positif, si le premier est négatif, l'inégalité a lieu; sinon on doit avoir, par élévation au carré et en divisant par p,

$$(\varepsilon) \qquad 2pq-9r \leqq 3\sqrt{(p^2-q)(q^2-2pr)}.$$

Avant d'aller plus loin, considérons de même l'iné-

galité (γ), pour laquelle on n'a plus l'hypothèse $p > 0$. Cette inégalité ne diffère primitivement de l'autre que par le changement du signe devant le radical qui entre dans l'expression du rayon r, et par le sens. *Si p est positif,* on doit donc avoir

$$p\sqrt{p^2 - 2q} + 3\sqrt{q^2 - 2pr} \gtreqless p^2 - 2q;$$

on peut élever au carré, diviser par p, et l'on a, d'après le calcul relatif à (ε),

$$2pq - 9r \gtreqless -3\sqrt{(p^2 - 2q)(q^2 - 2pr)}$$

ou

$$(\varepsilon_1) \qquad 9r - 2pq \lesseqgtr 3\sqrt{(p^2 - 2q)(q^2 - 2pr)}.$$

Si p est négatif, la multiplication par p change le sens de l'inégalité, ce qui donne

$$p\sqrt{p^2 - 2q} + 3\sqrt{q^2 - 2pr} \leqq p^2 - 2q;$$

si le premier membre est négatif, l'inégalité a lieu; sinon on peut élever au carré et diviser par p en changeant le sens de l'inégalité; on a, d'après le calcul relatif à (ε),

$$2pq - 9r \gtreqless -3\sqrt{(p^2 - 2q)\ldots};$$

c'est l'inégalité (ε_1).

15. Considérons les inégalités (ε) et (ε_1). Si le premier membre de l'une de ces inégalités est négatif, dans les conditions où l'on doit l'appliquer, elle est exacte. Il suffira donc de vérifier qu'on a toujours

$$(2pq - 9r)^2 \geqq 9(p^2 - 2q)(q^2 - 2pr).$$

Or, les racines de l'équation du troisième degré que l'on considère étant réelles, on a l'inégalité identique

en a, b, c,

$$(pq - 9r)^2 \leqq 4(p^2 - 3q)(q^2 - 3pr);$$

cela conduit à mettre l'inégalité à établir sous la forme

$$(pq - 9r)^2 \leqq 6(p^2 - 3q)(q^2 - 3pr),$$

et l'on voit ainsi que cette inégalité en a, b, c est identique *a fortiori*.

Le cas limite n'est atteint ici que dans l'hypothèse $a = b = c$; en effet, la quantité $(pq - 9r)^2$, étant inférieure ou au plus égale à $4AB$, ne peut atteindre la valeur $6AB$ que dans l'hypothèse $AB = 0$: on a alors

$$pq - 9r = 0. \qquad \ldots.$$

16. *Dans un tétraèdre orthocentrique, le centre le la sphère* INSCRITE *est-il intérieur à la sphère décrite sur* GH *comme diamètre, ou encore l'angle* GIH *est-il obtus?*

Comme les points G et H divisent le segment $O\Omega$ dans le rapport de 3 à 1, la sphère décrite sur GH comme diamètre est le lieu des points pour lesquels on a

$$\frac{OM}{\Omega M} = 3;$$

la propriété énoncée aura donc lieu si l'on a

$$\frac{IO}{I\Omega} > 3.$$

Or, la formule (4) donne

$$(8) \qquad \overline{IO}^2 - 9\overline{I\Omega}^2 = 2(R^2 - 9r^2 - \overline{OI}^2);$$

on doit donc avoir

$$(9) \qquad \overline{OI}^2 < R^2 - 9r^2;$$

si l'inégalité (5) est exacte (il s'agit ici de la sphère inscrite), celle-ci l'est *a fortiori*.

17. L'une ou l'autre des égalités

$$\overline{OI}^2 = (R \mp 3r)(R \pm r)$$

a lieu dans des conditions qui ont été indiquées au n° 11 : avec les signes supérieurs, la seconde sphère des douze points est tangente à la sphère inscrite, qu'elle enveloppe ; avec les signes inférieurs, elle est tangente extérieurement à une sphère exinscrite dans l'un des trièdres du tétraèdre.

Pour la sphère *inscrite*, la quantité $\overline{OI}^2$ ne peut atteindre la limite $R^2 - 9r^2$ que si la limite

$$(R - 3r)(R - r)$$

s'élève à la valeur $R^2 - 9r^2$, ce qui exige

$$R = 3r \quad \text{ou} \quad r = 0.$$

Si l'on écarte la seconde hypothèse, on doit avoir

$$R = 3r,$$

ce qui exige

$$OI = 0,$$

et le point I est en O ; on a alors

$$\Omega I = 0,$$

de sorte que Ω est en O, ou encore H est en O, ainsi que G et Γ : les centres de gravité des faces du tétraèdre coïncidant avec les centres des cercles circonscrits, ces faces sont des triangles équilatéraux, et l'on a affaire à un tétraèdre régulier. On indiquera au n° 21 des tétraèdres évanouissants ($r = 0$) pour lesquels l'angle GIH est droit.

Note. — Si la seconde sphère des douze points enveloppe réellement la sphère *inscrite*, le point de contact t de celle-ci avec le plan ABC, par exemple, doit être intérieur au cercle suivant lequel cette sphère des douze points coupe le plan ABC, c'est-à-dire au cercle décrit sur gh comme diamètre, h étant l'orthocentre du triangle ABC, g étant le centre de gravité. Si l'on se donne le triangle ABC, le cercle en question est déterminé et le point t doit être à l'intérieur de ce cercle, quelle que soit la hauteur hD du tétraèdre.

Or, si l'on donne la base ABC d'un tétraèdre ABCD, et le pied h de la hauteur, sans supposer que le tétraèdre est orthocentrique, quel est le lieu des points de contact avec le plan ABC des huit sphères tangentes aux faces du tétraèdre? Si I est, par exemple, le centre de la sphère inscrite, la droite DI contient encore le centre I' d'une sphère tangente aux quatre faces; les points de contact t et t' avec le plan ABC sont en ligne droite avec h; les coordonnées du point t, rapporté au triangle ABC, sont

$$r \cot \frac{\alpha}{2}, \quad r \cot \frac{\beta}{2}, \quad r \cot \frac{\gamma}{2},$$

α, β, γ étant les dièdres suivant BC, CA, AB, et les coordonnées du point t' sont

$$r' \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}, \quad r' \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}, \quad r' \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2},$$

de sorte que ces deux points sont inverses par rapport au triangle ABC. *Le lieu des points de contact t est donc le lieu des points qui sont alignés avec leur inverse sur le point h.* C'est une courbe du troisième ordre, passant en h, et toute sécante menée par h la coupe en deux points inverses : elle passe aux

points A, B, C et par les points α, β, γ, où les droites Ah, Bh, Ch percent les côtés opposés; elle passe par les centres i, i', i'', i''' des cercles tangents aux trois côtés du triangle ABC, et les tangentes en ces points passent en h; elle passe en h, comme on l'a dit, et aussi par le point inverse o, la tangente en h passant par ce point inverse; l'équation de la courbe montre que les tangentes aux points A, B, C passent aussi par ce point inverse.

Lorsqu'il s'agit de tétraèdres orthocentriques, h est l'orthocentre du triangle ABC, les points α, β, γ sont les pieds des hauteurs, le point o est le centre du cercle circonscrit au triangle. Si les angles A, B, C sont aigus (¹), la partie du lieu qui est relative à la sphère *inscrite* est un arc de courbe qui va de h en i, la tangente en h passant au centre o du cercle circonscrit, la tangente en i passant en h; on voit (n° 8) que le point i est intérieur au cercle décrit sur gh comme diamètre, et, dans diverses constructions graphiques que j'ai effectuées par la méthode de M. Hermary, j'ai toujours trouvé que l'arc de courbe en question est intérieur à ce cercle. Si l'angle A est obtus (²), la partie du lieu qui est relative à la sphère inscrite est un arc de courbe qui va de A en i, la tangente en A passant en o, la tangente en i passant en h; j'ai obtenu le même résultat que dans l'autre cas.

[On construit facilement les points t, d'après la méthode de M. Hermary, en prenant sur les hauteurs du triangle ABC (je suppose le tétraèdre orthocentrique)

(¹) Le plus petit angle du triangle étant C, la courbe se compose d'une branche infinie C$oih\gamma i'''$ et de deux branches hyperboliques $i'\alpha$B, $i''\beta$A.

(²) Le plus petit angle du triangle étant encore C, la courbe se compose d'une branche infinie $i'o$C$i''\gamma h$, et d'un ovale A$i\alpha$B$i'''\beta$.

trois points D_1, D_2, D_3 tels qu'on ait

$$AD_2 = AD_3, \qquad BD_3 = BD_1, \qquad \text{d'où} \qquad CD_1 = CD_2,$$

ce qui laisse un de ces points arbitraires, et en prenant le centre du cercle $D_1 D_2 D_3$. J'observe en passant ceci. La figure $ABCD_1 D_2 D_3$ dépend de quatre paramètres au point de vue de la grandeur. Si l'on se donne le triangle $D_1 D_2 D_3$, il existe donc un lieu du point h tel que, A, B, C étant les intersections des droites hD_1, hD_2, hD_3 avec les perpendiculaires menées aux côtés du triangle $D_1 D_2 D_3$ en leurs milieux, le point h soit l'orthocentre du triangle ABC; en prenant comme triangle de référence le triangle $D_1 D_2 D_3$, on trouve qu'un tel point h et son inverse par rapport à ce triangle sont alignés avec l'orthocentre du triangle. Le point h est donc le point de contact avec le plan ABC d'une sphère tangente aux quatre faces d'un certain tétraèdre orthocentrique ayant pour base le triangle $D_1 D_2 D_3$.

TROISIÈME PARTIE.

Transformation de l'inégalité $\overline{OI}^2 \leqq (R - 3r)(R + r)$.

18. Je me bornerai dans ce paragraphe à ce qui concerne la sphère *inscrite*.

Les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre quelconque étant affectés des coefficients $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$, ..., le barycentre est le centre I de la sphère inscrite, avec le coefficient $\frac{1}{r}$; on a donc, pour tout point M,

$$\sum \frac{\overline{MA}}{h_1} = \frac{\overline{MI}^2}{r} + C,$$

C étant une constante. Si l'on met le point M en O,

on a

$$\frac{R^2}{r} = \frac{\overline{OI}^2}{r} + C,$$

ou

$$R^2 - \overline{OI}^2 = C \times r,$$

r étant un facteur.

19. Si le tétraèdre est orthocentrique, la constante C de la formule générale donnée d'abord peut être déterminée en mettant le point M en H. En remplaçant $\overline{IH}^2$ par $3r^2 + (H)$, on a

$$\begin{aligned} C &= \frac{\overline{HA}^2}{h_1} + \ldots - \frac{(H)}{r} - 3r \\ &= \frac{\overline{HA}^2}{h_1} + \ldots - \frac{(H)}{h_1} - \ldots - 3r \\ &= \frac{\overline{HA}^2 + \overline{HA} \times \overline{PH}}{h_1} + \ldots - 3r \\ &= \sum \overline{HA} - 3r, \end{aligned}$$

$\overline{HA}$ étant positif dans le sens PA.

La formule relative à $R^2 - \overline{OI}^2$ prend donc, *pour un tétraèdre orthocentrique*, la forme intéressante

$$(1) \qquad R^2 - \overline{OI}^2 = r \times \left(\sum \overline{HA} - 3r \right).$$

Au moyen de cette relation, l'inégalité (5) du n° 12, à savoir

$$\overline{OI}^2 \leqq R^2 - 2Rr - 3r^2,$$

équivaut à la suivante :

$$2R + 3r \leqq \sum \overline{HA} - 3r$$

ou

$$(2) \qquad 2R + 6r \leqq \sum \overline{HA}.$$

C'est ainsi que, au n° 13, avec un tétraèdre ayant un trièdre trirectangle, on a obtenu (après avoir, comme ici, divisé par r)

$$2R + 6r \leqq a + b + c:$$

le second membre n'a alors que trois termes, au lieu de quatre.

20. La formule (8) du n° 16 devient, en vertu de (1),

$$(3) \qquad \overline{IO}^2 - 9\overline{I\Omega}^2 = 2r\left(\sum \overline{HA} - 12r\right);$$

l'inégalité $\frac{IO}{I\Omega} > 3$, indiquée au n° 16, équivaut donc à celle-ci :

$$(4) \qquad 12r \leqq \sum \overline{HA},$$

qui rentre d'ailleurs dans l'inégalité (2), si l'on a $R \geqq 3r$, comme on l'a dit au n° 12.

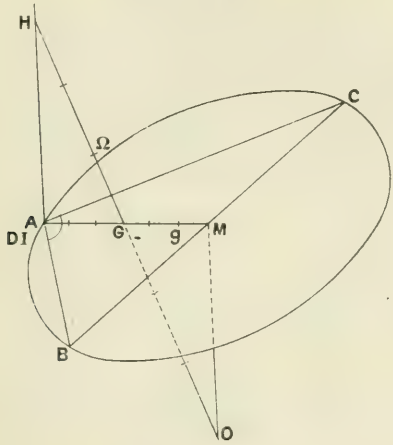
21. La présence du facteur r dans les expressions des quantités

$$R^2 - \overline{OI}^2 \quad \text{et} \quad \overline{IO}^2 - 9\overline{I\Omega}^2$$

s'explique aisément. Si, dans un tétraèdre orthocentrique, la face ABC ayant en A un angle qui diffère infiniment peu d'un angle droit (*fig.* 4), l'arête AD est infiniment petite, dans une direction qui est d'ailleurs simplement orthogonale à BC, le centre I de la sphère inscrite est infiniment voisin des points A et D, de sorte que la quantité $R^2 - \overline{OI}^2$ est infiniment petite,

en même temps que r est infiniment petit, le facteur $\sum \overline{HA} - 3r$ restant fini. Le centre O de la sphère circonscrite est alors sur la perpendiculaire au plan ABC menée par le milieu M de BC, et les

Fig. 4.



points H et O sont symétriques par rapport au point G milieu de AM; le point I étant en A, l'angle GIH est droit, le point I est sur la sphère de diamètre GH; on a

$$\frac{IO}{I\Omega} = 3;$$

on vérifie aisément cette dernière égalité : en appelant g le centre de gravité du triangle ABC, situé au tiers de MA, on a

$$IO = 3g\Omega = 3I\Omega.$$

La formule (8), dans laquelle on fait $r = 0$, $R = OI$, donne naturellement

$$\frac{IO}{I\Omega} = 3.$$

Si l'on donne, dans un tétraèdre orthocentrique, les points O, H, I, ce tétraèdre dépend d'un paramètre. Supposons que le point I soit donné sur la sphère de diamètre GH, de sorte qu'on ait

$$\widehat{GIH} = 1^d.$$

On aura, avec un paramètre, des tétraèdres évanouissants (*fig.* 4) ayant deux sommets A et D confondus en I : les faces ABC seront dans le plan mené par D perpendiculairement à DH, et ces faces seront des triangles, rectangles en A, et inscrits au cercle de centre M qui passe en A; pour chaque position de l'hypoténuse BC, la direction AD sera la direction orthogonale à BC dans le plan tangent en A à la sphère de centre O qui passe en A.

Note. — La première sphère des douze points d'un tétraèdre orthocentrique, celle qui passe par les milieux des arêtes et par les pieds des perpendiculaires communes aux arêtes, est bien moins intéressante que la seconde sphère des douze points, dont les centres d'homothétie avec la sphère circonscrite sont les points H et G. Voici toutefois un fait intéressant. La quantité désignée par (H) est la puissance du point H par rapport à la première sphère des douze points : on le voit en évaluant cette puissance suivant la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées du tétraèdre. Il suit de là que *la sphère conjuguée à un tétraèdre orthocentrique est orthogonale à la première sphère des douze points de ce tétraèdre.* Cette sphère conjuguée a, en effet, pour centre le point H, et, si ρ est son rayon, on a

$$\rho^2 = (H) = \text{puissance de H}\ldots.$$

[O'2kβ]

SUR CERTAINS SYSTEMES ORTHOGONAUX DU PLAN ET SUR LES SURFACES INTÉGRALES DE L'EQUATION DE LAPLACE $r + t = 0$;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Dans le plan Oxy rapporté à des axes rectangulaires Ox, Oy, soit une famille de courbes (C),

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$

dépendant du paramètre λ. L'angle α avec Ox de la tangente en un point $M(x, y)$ du plan à l'une des courbes (C) qui passent par M est, après élimination de λ, une fonction de (x, y).

L'objet de cette Note est de démontrer les propriétés suivantes :

1° Si α est une intégrale de l'équation de Laplace

$$\Delta_2 \alpha = 0,$$

les trajectoires, sous un angle constant donné, des courbes (C) se déterminent par quadratures.

2° Le réseau formé par les courbes (C) et leurs trajectoires orthogonales est constitué par l'ensemble des projections des asymptotiques d'une même surface. La détermination de cette surface dépend de quadratures.

Réciproquement, si les asymptotiques d'une surface se projettent sur Oxy suivant un réseau orthogonal, cette surface est intégrale de l'équation de Laplace

$$\Delta_2 z = 0,$$

et les courbes du réseau jouissent de la propriété

$$\Delta_2 \alpha = 0.$$

3° Dans cette troisième Partie, j'indique des cas particuliers de ces surfaces et une étude des surfaces

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = ar^{K}\sin K\theta.$$

PREMIÈRE PARTIE.

Introduisons les coordonnées isotropes du plan

$$u = x + iy = re^{i\theta}, \qquad v = x - iy = re^{-i\theta};$$

le ds^2 du plan est

$$ds^2 = du\,dv:$$

définissons l'angle α par les relations

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\sin\alpha} = ds,$$

c'est-à-dire par la relation

$$dv = e^{-2i\alpha}\,du.$$

Théorème. — *Si α est une intégrale de l'équation de Laplace, les courbes* (C) *se déterminent par quadratures.*

Soit

$$\alpha = U - V,$$

U et V étant des fonctions respectives de u et de v; l'équation différentielle des courbes (C) est

$$e^{-2iU}\,du = e^{-2iV}\,dv;$$

les variables étant séparées, l'équation s'intègre par quadratures

$$\int e^{-2iU}\,du - \int e^{-2iV}\,dv = \text{const.}$$

Théorème. — *Si $\Delta_2\alpha$ est nul, les trajectoires sous un angle donné des courbes* (C) *se déterminent par quadratures.*

L'angle α', pour les trajectoires sous l'angle ϖ des courbes (C), sera

$$\alpha' = \alpha + \varpi;$$

$\Delta_2\alpha$ et $\Delta_2\alpha'$ seront nuls simultanément. Les trajectoires seront données par des quadratures.

Pratiquement, on prendra

$$\alpha' = U' - V',$$

avec

$$U' = U + \frac{1}{2}\varpi, \qquad V' = V - \frac{1}{2}\varpi;$$

l'équation des trajectoires sera

$$e^{-i\varpi}\int e^{-2iU}\,du - e^{i\varpi}\int e^{-2iV}\,dv = \text{const.}$$

Exemples [1]. — I. *Paraboles homofocales :*

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = \text{const.},$$
$$4i\alpha = \log u - \log v;$$

les trajectoires sont les courbes

$$e^{i\varpi}\sqrt{u} - e^{-i\varpi}\sqrt{v} = \text{const.},$$

c'est-à-dire (résultat connu) les paraboles de même foyer

$$\sqrt{r}\sin\left(\varpi + \frac{1}{2}\theta\right) = \text{const.}$$

---

[1] A propos des trajectoires obliques, *voir* la question 1105 des *Nouvelles Annales* (Haton de la Goupillière). La méthode précédente peut être appliquée à certains des exemples proposés dans cette question.

II. *Hyperboles équilatères* $xy = \text{const.}$:

$$-2i\alpha = \log u - \log v;$$

les trajectoires obliques sont les hyperboles équilatères d'un faisceau

$$e^{-i\varpi} v^2 - e^{i\varpi} u^2 = \text{const.},$$
$$\sin\varpi(x^2 - y^2) + 2\cos\varpi\, xy = \text{const.},$$
$$r^2 \sin(2\theta - \varpi) = \text{const.}$$

Remarque I. — L'équation

$$\Delta_2 \alpha = 0$$

est invariante lorsqu'on prend une autre direction pour Ox. En outre, comme la fonction $\theta = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}$ satisfait à l'équation de Laplace, l'angle V du rayon vecteur issu du point O avec la tangente en M satisfera, lui aussi, à l'équation de Laplace. Si donc, pour un point O du plan, on a

$$\Delta_2 V = 0,$$

cette relation sera vraie lorsqu'on remplacera O par tout autre point.

Remarque II. — En égalant à une constante α_0 la fonction α, on obtient une courbe qui est le *lieu des points de contact des courbes* C *avec les tangentes de direction donnée,* ou encore le *lieu des points d'incidence des normales de direction donnée.* Lorsque α_0 varie, les courbes correspondantes constituent une famille de courbes à un paramètre : elle sera isotherme quand $\Delta_2 \alpha$ sera nul.

Comme premier exemple, citons les paraboles homofocales : les courbes $\alpha = \alpha_0$ sont les droites issues de O.

Comme second exemple [1], citons les coniques homofocales : les courbes $\alpha = \alpha_0$ sont les hyperboles équilatères du faisceau

$$\frac{y^2 - x^2 + c^2}{xy} = \text{const.},$$

trajectoires orthogonales des cartésiennes lieux des points M tels que

$$\text{MF} \times \text{MF}' = \text{const.},$$

F et F′ étant les foyers des coniques homofocales.

DEUXIÈME PARTIE.

Prenons pour équation des projections orthogonales, sur le plan Oxy, des asymptotiques d'une surface

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Théorème. — *Pour que les projections sur* Oxy *des asymptotiques d'une surface constituent un réseau orthogonal, il faut et il suffit que la surface soit une surface intégrale de l'équation de Laplace*

$$\Delta_2 z = 0 \quad [2].$$

---

[1] Ce lieu constitue la question n° 119 des *N. C.* (Nicolaïdès). Pour une généralisation, *cf.* les *Nouvelles Annales*, question 1200 (Gambey) et les *Nouvelles Annales* de 1876, p. 549 (Moret-Blanc).

[2] Cette équation, $r + t = 0$, a été pour la première fois, du point de vue géométrique, considérée par Meusnier; il se proposa de chercher les surfaces minima la vérifiant. Le résultat auquel il parvint (c'est-à-dire le théorème de Catalan) découle immédiatement de l'interprétation géométrique que nous donnons ici de l'équation $r + t = 0$ et de la propriété connue des asymptotiques d'une surface minima.

Théorème. — *La détermination des asymptotiques d'une surface* $\Delta_2 z = 0$ *s'effectue par quadratures.*

En posant

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = i\frac{v-u}{2}, \qquad z = U - V,$$

on trouve, pour équation des asymptotiques,

$$U''\,du^2 - V''\,dv^2 = 0,$$

d'où

$$\int \sqrt{U''}\,du \pm \int \sqrt{V''}\,dv = \text{const.}$$

Exemples. — I. *Surface* $\Delta_2 z = 0$, *de révolution autour de* Oz.

La seule surface $\Delta_2 z = 0$, de révolution, est la surface engendrée par la courbe logarithmique

$$z = a \log \frac{x^2 + y^2}{b}.$$

Les asymptotiques déterminées en la considérant soit comme une surface de révolution, soit comme une surface de Jamet, soit comme une surface $\Delta_2 z = 0$, sont, en projection, les spirales logarithmiques

$$r\,d\theta = \pm dr \quad (^1).$$

---

(1) Il est curieux de signaler la grande analogie de calculs et de résultats qui se présentent dans cette question et dans l'étude thermique d'un plan indéfini; dans le cas d'une source de chaleur punctiforme et le potentiel thermique étant

$$T = T_0 \log(x^2 + y^2),$$

les lignes de flux sont les spirales logarithmiques

$$d\theta = -a\frac{dr}{r}.$$

II. $z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$: les asymptotiques se projettent suivant les faisceaux orthogonaux d'hyperboles équilatères

$$x^2 - y^2 = \pm 2xy + \text{const.} \quad (^1).$$

Nous donnerons d'autres exemples dans la troisième Partie de cette Note.

Condition pour qu'un réseau orthogonal soit constitué par les projections des asymptotiques d'une même surface.

L'équation différentielle d'un réseau orthogonal est

$$dv^2 = e^{-4i\alpha}\, du^2.$$

Pour que l'équation prenne la forme

$$U''\, du^2 - V''\, dv^2 = 0,$$

il faut

$$-4i\alpha = \log U'' - \log V'', \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_2 \alpha = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante est que α satisfasse à l'équation de Laplace.

La détermination de la surface correspondante est équivalente à celle de U et de V connaissant U'' et V'', c'est-à-dire à quatre quadratures au plus.

Remarque. — Je signale, afin de simplifier certains calculs, qu'étant donné le réseau orthogonal

$$y'^2 - 1 = 2y'\, P(x, y),$$

---

(1) Sur cette surface et ses asymptotiques, *cf.* les compositions de licence données à Montpellier en 1896 et à Grenoble en 1895. Les asymptotiques dans l'espace sont des courbes du quatrième ordre; deux asymptotiques qui se rencontrent sont situées sur une même quadrique. La détermination des asymptotiques de cette surface peut être encore faite en la considérant comme une surface de Jamet.

la condition $\Delta_2 \alpha = 0$ s'écrit

$$\frac{\Delta_2 P}{\Delta_1 P} = \frac{2P}{P^2+1}.$$

TROISIÈME PARTIE.

Surfaces $\Delta_2 z = 0$ se rencontrant dans une représentation des fonctions analytiques. — Dans sa Thèse [1], M. Laurent associe à toute fonction $f(x+iy)$ la surface obtenue en portant sur la perpendiculaire au plan (x, y), au point (x, y), un segment z égal au module de f.

Le calcul montre que ces surfaces ne sont pas arbitraires et satisfont à l'équation

$$\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} = \frac{1}{z}.$$

En posant $z = e^Z$, elle devient

$$\Delta_2 Z = 0 \quad [2].$$

D'où une interprétation intéressante des surfaces $\Delta_2 z = 0$.

Surfaces $\Delta_2 z = 0$ se rencontrant dans le calcul des variations. — Le calcul des variations appliqué à

$$\int\int (p^2 + q^2)\, dx\, dy$$

condnit aux surfaces $\Delta_2 z = 0$. Cette propriété est im-

---

(1) H. Laurent, *Sur la continuité des fonctions imaginaires.* Thèse, 1865.

(2) Ce dernier calcul se trouve fait par Jamet (*N. C.*, 1877, p. 364); il démontre que, si $\Delta_2 z$ est nul, on a

$$\Delta_2 (\log \Delta_1 z) = 0.$$

portante au point de vue de l'existence (*cf.* les travaux de Riemann, Hilbert, etc.).

Une classe particulière de surfaces $\Delta_2 z = 0$. — Puisque la fonction $\theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$ satisfait à l'équation de Laplace, la fonction $\alpha = (m+1)\theta$ satisfera à cette équation. Le réseau des courbes (C) est formé par les courbes (spirales sinusoïdes)

$$\begin{cases} r^m = a^m \sin m\theta, \\ r^{-m} = b^m \sin m\theta. \end{cases}$$

La surface correspondante est

$$z = A r^{-2m} \sin 2m\theta.$$

Théorème. — *Pour une surface*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = A r^K \sin K\theta \qquad (K \neq 1),$$

les lignes de niveau, les lignes de plus grande pente, les lignes asymptotiques (constituant un réseau orthogonal en projection), sont des courbes du type

$$r^\mu = a^\mu \sin \mu\theta.$$

Pour une telle surface, le calcul donne

$$\begin{aligned} H^2 = EG - F^2 &= r^2 + A^2K^2 r^{2K}, \\ D = \quad AK(K-1) r^{K-1} &\sin K\theta, \\ D' = \quad AK(K-1) r^{K} &\cos K\theta, \\ D'' = -AK(K-1) r^{K+1} &\sin K\theta, \\ D'^2 - DD'' = A^2K^2(K-1)^2 r^{2K}&. \end{aligned}$$

La courbure totale ne dépend donc que de la distance du point à l'axe Oz.

Par suite, *la torsion en un point de toute asymptotique ne dépend que de la distance du point à l'axe* Oz.

Remarque. — Les surfaces de paramètres K et — K se correspondent, du point de vue des lignes de niveau et de plus grande pente et des lignes asymptotiques, projetées sur Oxy, par inversion de pôle O dans ce plan.

La surface K = — 1 seule fait exception, car il faut excepter de tout ce qui précède la valeur K = 1. Pour cette valeur K = — 1, la surface (1) a pour équation cartésienne

$$z = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

C'est une surface cubique dont les lignes de niveau et de plus grande pente sont des cercles en projection sur Oxy (2), et dont les lignes asymptotiques se projettent sur Oxy suivant deux faisceaux orthogonaux de cardioïdes.

Exemples de surfaces de la classe précédente. — En plus de l'exemple précédent, nous citerons les cas suivants :

Valeurs de K.	Équation de la surface.	Lignes de niveau et de plus grande pente.	Projections des asymptotiques.
2 . . .	paraboloïde $z = xy$	hyperboles équilatères	droites
— 2 . . .	$z = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$	lemniscates de Bernoulli	cercles
4 . . .	$z = xy(x^2 - y^2)$	»	hyperboles équilatères

(1) Cette surface remarquable a été rencontrée par M. Boussinesq comme transformée par traction horizontale d'un sol horizontal élastique (*Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques*, p. 189).

(2) Pour une étude détaillée de ces lignes de plus grande pente et de niveau, *cf.* Boussinesq, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 232.

Valeurs de K.	Équation de la surface.	Lignes de niveau et de plus grande pente.	Projections des asymptotiques.
$-4\ldots$	$z = \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$	»	lemniscates de Bernoulli
$\frac{2}{3}\ldots$	»	polaires réciproques de lemniscates de Bernoulli	orthogénides
$-\frac{2}{3}\ldots$	»	podaires de lemniscates de Bernoulli	cubiques de Tschirnhausen

Remarque. — Les surfaces précédentes constituent un cas particulier des *surfaces qui sont telles que leurs lignes de niveau et de plus grande pente se projettent sur* Oxy *suivant un réseau orthogonal de courbes intégrales de l'équation de Laplace*

$$\Delta_2 \alpha = 0.$$

Définissant une telle surface par son équation cartésienne, on trouve

$$\alpha = -\operatorname{arc\,tang} \frac{p}{q},$$

$$\Delta_2 \alpha = -\frac{\Delta_2 z}{(\Delta_1 z)^2} J\left(\log \frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z},\ z\right),$$

J désignant le jacobien.

La condition $\Delta_2 \alpha = 0$ est donc équivalente à

$$\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} = \text{fonction de } z,$$

et, par suite, *ces surfaces sont celles dont les lignes de niveau sont isothermes.*

Ce sont encore les surfaces provenant de l'application du calcul des variations aux intégrales doubles de la forme

$$\int\int f(z)(p^2+q^2)\,dx\,dy.$$

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Caen.

Épreuve écrite. — 1° *Éclipses de Lune.*

2° *Expression du temps dans le mouvement parabolique d'une comète.*

Épreuve pratique. — *A un instant donné, l'anomalie moyenne de Vénus est*

$$\zeta = 18^\circ 30' 15'';$$

les éléments de son orbite elliptique sont :

Longitude du nœud ascendant....	$\theta = 75^\circ 19' 52''$
Inclinaison du plan de l'orbite...	$i = 3^\circ 23' 35''$
Longitude du périhélie..... ...	$\varpi = 129^\circ 27' 15''$
Excentricité.....	$e = 0,068\,433$
Demi-grand axe.....	$a = 0,723\,33$

Calculer l'anomalie excentrique u, l'anomalie vraie w, la longitude et la latitude α et β, la distance de Vénus au Soleil, r.

Solution.

On trouve

$$u = 19^\circ 50' 4'', \qquad w = 21^\circ 12' 40'',$$
$$\alpha = 150^\circ 38' 26'', \qquad \beta = 3^\circ 16' 56'', \qquad r = 0,676\,77.$$

(Juin 1908.)

Dijon.

Épreuve écrite. — I. *Mesure des hauteurs au théodolite.*

II. *Détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre.*

Épreuve pratique. — *Déterminer la longueur de l'arc de 1° sur le méridien et la parallèle à la latitude de 42°.*

Données. — Rayon équatorial de la Terre 6378253^{m}. Aplatissement $\frac{1}{293}$.

(Juillet 1907.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Théorie du niveau à bulle d'air.*

II. *Détermination de la latitude par une hauteur de la Polaire.*

(Pas d'épreuve pratique.)

(Novembre 1907.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Deux grandeurs x, y sont liées à trois grandeurs mesurables* A, B, N *par une relation linéaire*

$$AX + BY = N. \tag{1}$$

On a effectué μ mesures $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$ de N *correspondant à μ systèmes de valeurs exactes $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \ldots, (a_\mu, b_\mu)$ de* A *et de* B. *Déterminer, par la méthode des moindres carrés, les valeurs les plus probables x, y de* X *et de* Y.

Erreur moyenne des mesures de N ; *erreurs à craindre sur x et sur y.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calcul des longitude et latitude héliocentriques de Mars pour le* 2 *juillet* 1908, *midi, temps moyen de Paris.*

Données numériques :

Pour le 1er janvier 1850, midi, temps moyen de Paris,

$$l_0 = 83^\circ 40' 30'';$$

Pour 1908,

$$\varpi = 333^\circ 17' 54'',$$
$$\Omega = 48^\circ 23' 53'',$$
$$i = 1^\circ 51' 2''.$$

Enfin, on a

$$n = 1886'',5184, \qquad e = 0,093261.$$

(Juillet 1908.)

QUESTIONS.

2117. Étant données dans l'espace deux figures égales F et F', soient A un point de la première et B le point correspondant de la seconde ; le point B étant considéré comme point de F, soit C le point correspondant de F' ; le point C étant considéré comme point de F, soit D le point correspondant de F'. Les deux triangles ABC et BCD sont égaux. Démontrer *directement* que, si O est le centre de la sphère qui passe en A, B, C, D, on ne peut généralement faire coïncider les deux tétraèdres OABC et OBCD (qui sont d'ailleurs égaux) en mettant A en B, B en C, C en D. (G. F.)

2118. L'équation $x - e \sin(m + x) = 0$ peut s'écrire

$$\operatorname{tang}\left(x + \frac{m}{2}\right) = \frac{\rho + e}{\rho - e} \operatorname{tang}\frac{m}{2}, \qquad \text{où} \qquad \rho = \frac{x}{\sin x}.$$

Construire le lieu de l'intersection des droites menées par les extrémités, A et B, du segment $AB = e$, et faisant avec ce segment respectivement les angles m et $m + x$.

(A. Pellet.)

2119. Lorsqu'une courbe (C) roule sur une droite, le symétrique, par rapport au point de contact P de la courbe avec la droite à un instant, du centre de courbure de la roulette décrite par un point M, invariablement lié à la courbe, se trouve sur la polaire de M par rapport au cercle osculateur de (C) au point P. (A. Pellet.)

2120. On donne une surface

$$X + Y + Z = 1,$$

X étant fonction de la seule coordonnée x, Y de y, Z de z : trouver les transformées telles que les systèmes conjugués se correspondent sur la surface et sa transformée.

(A. Pellet.)

[O¹3gγ]

ÉTUDE SUR LES ENVELOPPES DE COURBES A UN PARAMÈTRE;

PAR M. BARRÉ,
Capitaine du Génie.

1. *Considérations préliminaires.* — Conformément à leur signification géométrique la plus naturelle, nous définirons dans cette étude une enveloppe de courbes dépendant d'un paramètre comme une courbe fixe à laquelle restent constamment tangentes les courbes mobiles (enveloppées). Il est à remarquer que ce point de vue, adopté en général par les auteurs classiques pour les courbes gauches, ne l'est pas pour les courbes planes et les surfaces. On considère alors, en général ([1]), l'enveloppe comme un lieu de points (ou de courbes) caractéristiques. On montre bien que ce lieu est une enveloppe au premier sens du mot, mais on omet de prouver la réciproque, à savoir que toute cette enveloppe a bien été déterminée ainsi. Dans ce qui suit, nous démontrerons, pour les courbes à un paramètre, l'équivalence des deux définitions et nous établirons que les coordonnées des points de l'enveloppe peuvent, en général, s'exprimer par des fonctions continues et dérivables du paramètre dont dépend l'enveloppée. Ce fait est admis par tous les Traités que nous avons pu voir et qui définissent l'enveloppe par la propriété de tangence. Il n'est nullement évident et nous aurons l'occasion, au cours de ce Mémoire, de rencontrer des cas où cette

([1]) M. Goursat, dans son *Cours d'Analyse*, conserve uniformément le premier point de vue.

hypothèse cesse d'être vérifiée. Leur considération nous conduira même à des propriétés relatives aux singularités que présente le problème des enveloppes de courbes à un paramètre.

II. *Recherche de l'enveloppe.* — Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(x, y, z, a) = 0, \\ f_2(x, y, z', a) = 0 \end{cases}$$

les équations (dont nous supposons les premiers membres analytiques par rapport aux quatre variables qui y figurent) de l'enveloppée.

Si l'enveloppe existe, elle peut être représentée par des équations

$$(2)\qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

dans lesquelles f, φ et ψ sont des fonctions analytiques du paramètre t, sauf peut-être pour des valeurs isolées.

Soit alors $t = t_0$ la valeur du paramètre correspondant à un point ordinaire M_0 de l'enveloppe (E). Les conditions nécessaires et suffisantes pour que (E) touche en M_0 une certaine enveloppée (C_0), correspondant à la valeur a_0 du paramètre a, sont

$$(3)\qquad \begin{cases} f_1[f(t_0), \varphi(t_0), \psi(t_0), a_0] = 0, \\ f_2[f(t_0), \varphi(t_0), \psi(t_0), a_0] = 0; \end{cases}$$

et, en posant

$$f' = \frac{df}{dt}, \ldots,$$

on a également

$$(4)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x} f' + \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \varphi' + \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \psi'\right)_{\substack{t = t_0 \\ a = a_0}} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x} f' + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \varphi' + \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \psi'\right)_{\substack{t = t_0 \\ a = a_0}} = 0, \end{cases}$$

en désignant par $[F]_{\substack{t=t_0\\a=a_0}}$ la valeur que prend une fonction $F(t, a)$ pour $t = t_0$ et $a = a_0$.

Si l'on fait varier le point M_0 il en sera de même de la courbe C_0 ; autrement dit, lorsque nous ferons varier t il en sera de même de la valeur de a correspondante.

Je dis que pour chaque système de valeur de a et de t correspondantes on doit avoir

$$(5) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial a} = 0.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la succession des valeurs de a correspondant aux diverses valeurs de t formerait une fonction de t analytique dans les environs du point considéré : $a = \lambda(t)$ qu'on pourrait tirer de celle des deux équations (1) dont la dérivée par rapport à a ne serait pas nulle.

Cette fonction devrait satisfaire aux deux équations

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} f' + \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \varphi' + \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \psi' + \dfrac{\partial f_1}{\partial a} \lambda' = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} f' + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \varphi' + \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \psi' + \dfrac{\partial f_2}{\partial a} \lambda' = 0. \end{cases}$$

Mais, d'autre part, pour un système de valeurs correspondantes *quelconques* (a_0, t_0) les équations (4) doivent être vérifiées. Il devrait en être de même des équations obtenues en remplaçant dans les relations (6) les variables a et t par un tel système, ce qui exige que les dérivées $\frac{\partial f_1}{\partial a}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ s'annulent pour $a = a_0$ et $t = t_0$. Comme t_0 et a_0 sont d'ailleurs quelconques il y a contradiction avec l'hypothèse faite que la fonction $\lambda(t)$ ne satisfaisait pas aux deux équations (5).

Les coordonnées x, y, z du point de contact de l'enveloppe et de l'enveloppée doivent donc vérifier les

quatre équations

$$(7)\quad \begin{cases} f_1(x, y, z, a) = 0, & f_2(x, y, z, a) = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial a}(x, y, z, a) = 0, & \dfrac{\partial f_2}{\partial a}(x, y, z, a) = 0. \end{cases}$$

Ces équations déterminent en général des points isolés. Si elles se réduisent à trois, elles définissent x, y et z comme des fonctions analytiques de a, sauf exception possible pour les points dont les coordonnées vérifieraient en outre les deux équations

$$(8)\quad \begin{cases} \Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial a\,\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial a\,\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial a\,\partial z} \end{vmatrix} = 0, \\ \Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial a\,\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial a\,\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial a\,\partial z} \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Ces nouvelles équations ne pourraient qu'exceptionnellement, même en des points isolés, être vérifiées en même temps que les trois équations auxquelles se réduirait le système (7).

Si donc l'enveloppe existe, les coordonnées de son point de contact avec l'enveloppée sont des fonctions analytiques du paramètre a dont dépend celle-ci :

Inversement, s'il existe trois fonctions analytiques

$$(9)\qquad x = f(a), \qquad y = \varphi(a), \qquad z = \psi(a),$$

satisfaisant aux quatre équations (7), la courbe (E) représentée par les équations (8) est une enveloppe des

courbes (C). En effet, en différentiant les équations (8), on obtient sur la courbe (E) les différentielles

$$\delta x = f'(a)\,da, \qquad \delta y = \varphi'_a(a)\,da, \qquad \delta z = \psi'(a)\,da,$$

qui satisfont aux équations suivantes tirées de la différentiation des deux premières équations (7),

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f_1}{\partial a}\,da = 0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f_2}{\partial a}\,da = 0,$$

lesquelles se réduisent, en vertu des deux dernières équations (7), aux suivantes :

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\delta z = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\delta z = 0. \end{cases}$$

Le point défini par les formules (9) appartient évidemment à la courbe (C) de paramètre a en vertu des deux premières équations (7) auxquelles satisfont identiquement f, φ et ψ. D'autre part, les équations (10) qui définissent δx, δy, δz ne diffèrent pas de celles qui définissent dx, dy, dz différentielles des coordonnées de l'enveloppée (7).

La courbe (E) touche donc la courbe (C) au point (x, y, z, a).

Cas de dégénérescence de l'enveloppe. — Il peut arriver que les fonctions f, φ et ψ se réduisent à trois constantes x_1, y_1, z_1. Les équations (6) seraient alors vérifiées pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, quelle que soit la valeur de a. Dans ce cas, la courbe mobile c passerait constamment par le point fixe (x_1, y_1, z_1) qui pourrait être considéré comme appartenant à l'enveloppe.

Inversement, si une courbe mobile passe par un point fixe, celui-ci peut être considéré comme constituant une enveloppe de la courbe.

Nous laisserons au lecteur le soin de faire cette vérification consistant à exprimer que les quatre équations (7) sont vérifiées quel que soit a pour

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1.$$

Il se peut d'ailleurs qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de véritable enveloppe.

En résumé : 1° *Une courbe variable de l'espace appartenant à une famille à un paramètre n'a pas, en général, d'enveloppe.*

2° *S'il existe un ensemble de trois fonctions analytiques $f(a)$, $\varphi(a)$, $\psi(a)$ qui, substituées respectivement à x, y et z, dans les équations (7), satisfont à celles-ci, la courbe mobile* (C) *admet pour enveloppe la courbe représentée par les équations*

$$x = f(a), \qquad y = \varphi(a), \qquad z = \psi(a).$$

Ces conclusions supposent que le point considéré n'est singulier ni sur la courbe mobile ni sur la courbe enveloppe, car nos calculs comportent en effet cette restriction [1].

---

[1] La présence sur l'enveloppe d'un point singulier de l'enveloppée serait d'ailleurs exceptionnelle, car il correspondrait à la vérification des deux conditions nouvelles

$$\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial z}}$$

qui se traduisent [après substitution $x = f(a)$, $y = \varphi(a)$, $z = \psi(a)$] par deux équations pour déterminer une valeur de a.

3° *Quand l'enveloppe existe, elle peut s'obtenir sous la forme*

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0,$$

en éliminant a de deux façons entre les équations (7).

Toutefois, l'emploi de cette méthode, pour être correct, doit exiger quelques précautions sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Théorème. — *Si les courbes d'une famille à un paramètre ont une enveloppe, deux de ces courbes infiniment voisines quelconques peuvent, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, être considérées comme ayant un point commun au moins dont le lieu se confond avec l'enveloppe.*

Un calcul tout à fait classique montre que les points communs à deux courbes infiniment voisines d'une famille dépendant d'un paramètre variable a sont déterminées par les équations de la courbe

$$f_1(x, y, z, a) = 0, \qquad f_2(x, y, z, a) = 0$$

jointes aux suivantes :

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial a} = 0.$$

En général, il y aura un nombre limité ou tout au plus une infinité discontinue de courbes ayant un point commun avec la courbe infiniment voisine. Au contraire, dans le cas où il existe une enveloppe, à toute valeur de a correspond au moins un système de valeurs de x, y et z satisfaisant aux équations précédentes, c'est-à-dire un point commun à la courbe de paramètre (a) et à la courbe infiniment voisine.

Réciproque. — *Si une courbe quelconque d'une*

famille à un paramètre possède avec la courbe infiniment voisine un point commun au moins, les courbes de la famille admettent une enveloppe. Celle-ci est confondue avec le lieu des points communs à deux courbes infiniment voisines.

Nous nous dispenserons de donner de cette réciproque la démonstration qui peut se calquer sur celle du théorème direct.

III. Cas particulier. — *La courbe est déterminée par une surface fixe* $[F(x, y, z) = 0]$ *et une surface mobile* $[f(x, y, z, a) = 0]$.

La courbe considérée admet en général une enveloppe, car les quatre équations (7) se réduisent dans ce cas aux trois suivantes :

$$(11) \quad F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0.$$

La théorie des enveloppes planes rentre immédiatement dans ce cas. En prenant pour plan $z = 0$ le plan des courbes planes étudiées, celles-ci sont déterminées dans leur plan par deux équations de la forme

$$\mathcal{F}(x, y, a) = 0$$

et elles admettent une courbe enveloppe obtenue en cherchant le lieu des intersections des deux courbes

$$(12) \qquad \mathcal{F}(x, y, a) = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}(x, y, a) = 0.$$

Ces deux équations sont celles, bien connues, auxquelles conduit la théorie classique des enveloppes dans le plan.

La conclusion relative au cas d'une courbe quelconque, déterminée par une surface fixe et une surface

mobile, donne lieu à une remarque intéressante. En effet, une courbe mobile (C) quelconque, déterminée par l'intersection de deux surfaces mobiles (S_1) et (S_2) dépendant d'un paramètre, engendrera une surface fixe (S) dont l'équation cartésienne

$$(13) \qquad \Phi(x, y, z) = 0$$

s'obtient en éliminant a entre les équations

$$(14) \qquad f_1(x, y, z, a) = 0, \qquad f_2(x, y, z, a) = 0,$$

des surfaces mobiles. Cette élimination se fera en tirant a en fonction de x, y et z de celle des équations (14) pour laquelle la dérivée partielle par rapport à a n'est pas nulle. Si par exemple $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ est différent de zéro aux environs d'un système de valeur déterminée, nous tirerons de la seconde équation (14)

$$a = \lambda(x, y, z).$$

et, en portant dans la première équation (14), nous obtiendrons

$$(15) \qquad \Phi \equiv f_1[x, y, z, \lambda(x, y, z)] = 0.$$

Mais, pour avoir l'enveloppe de la courbe considérée comme déterminée par la surface fixe (S) d'équation (15) et la surface mobile (S_2), nous devons joindre aux deux équations correspondantes

$$\Phi(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z, a) = 0$$

l'équation

$$\frac{\partial f_2}{\partial a}(x, y, z, a) = 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse fondamen-

tale que nous avions faite au début $\left(\frac{\partial f_2}{\partial a} \neq 0\right)$. Ceci explique le paradoxe apparent consistant en ce que toute courbe mobile, pouvant être considérée comme appartenant à une surface fixe et à une surface mobile, devrait avoir une enveloppe.

Si toutefois on fait le calcul qui vient d'être exposé, la fonction $\lambda(x, y, z)$ sera analytique en tout point n'annulant pas $\frac{\partial f_2}{\partial a}$. Il en sera de même de la fonction Φ obtenue tandis que le contraire se présentera pour les points pouvant appartenir à l'enveloppe de (C). Il peut d'ailleurs arriver [par exemple en rendant rationnelle l'équation (15) lorsque celle-ci se réduit à la somme d'un polynome et d'un radical du second degré] qu'on puisse mettre l'équation (15) sous une forme dépourvue de singularités. Mais alors on a en général introduit des branches étrangères, lesquelles d'ailleurs peuvent avoir ou ne pas avoir d'enveloppe. Toutefois la courbe formée par l'ensemble de chaque courbe (C) et des branches étrangères correspondantes possédera en général une enveloppe.

Théorème. — *Si une surface fixe* (S) *et une surface mobile* (S_2) *qui définissent une courbe appartenant à une famille à un paramètre sont constamment tangentes en un point de celle-ci, le lieu de ce point, en général point double ordinaire de* (C), *forme une branche singulière d'enveloppe pour la courbe* (C).

Il existe, comme conséquence de l'hypothèse, trois fonctions analytiques de a qui, substituées à x, y, et z dans les équations des surfaces (S) et (S_2)

$$(16) \qquad F(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z, a) = 0$$

et dans les équations

$$(17)\qquad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial z}},$$

les vérifient identiquement.

Si nous différentions les deux premières en y considérant x, y et z comme fonctions de a, on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f_2}{\partial a}\,da = 0,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte des équations (17),

$$\frac{\partial f_2}{\partial a} = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

IV. *Discussion des singularités que peut présenter la solution du problème des enveloppes de courbes à un paramètre.* — Lorsque l'enveloppe existe on peut, avons-nous dit, la représenter par deux équations

$$(18)\qquad F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0,$$

obtenues en éliminant a entre les équations (7). Or nous allons voir que cette opération ne peut se faire qu'en tirant a de l'une des équations

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial a} = 0,$$

et portant le résultat obtenu dans deux des trois autres.

L'enveloppe existant, la courbe ainsi définie dans le

domaine du point considéré appartiendra également à la surface représentée par celle des équations (7) dont il n'a pas été fait usage.

Nous reviendrons ci-après sur cette opération : nous nous bornerons ici à faire remarquer qu'on ne peut, pour obtenir a en fonction analytique des coordonnées x, y, z du point considéré, songer à utiliser l'une des deux premières équations (7), car précisément au point envisagé les dérivées partielles par rapport à a des fonctions f_1 et f_2 doivent être nulles. D'autre part, pour la même raison, nous ne sommes assurés de la légitimité de l'opération que nous venons de définir que si aux points considérés on n'a pas à la fois

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2} = 0.$$

Il est d'ailleurs évident que la réalisation des égalités (19), même pour des points isolés de l'enveloppe, sera un fait exceptionnel en général et par suite aussi la difficulté qui en résulte. Toutefois elle se présentera normalement pour des points isolés de l'enveloppe lorsque la courbe mobile sera définie par une surface fixe et une surface mobile. Si les équations de ces dernières sont

$$F(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z, a) = 0,$$

les points de l'enveloppe présentant les particularités dont il s'agit seront déterminées par les quatre équations

$$(19\,bis) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} F(x, y, z) = 0, & f_1(x, y, z, a) = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial a} = 0, & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0. \end{array} \right.$$

Ils pourront être en nombre fini ou infini, formant une succession de valeurs isolées de x, y, z, a. En

particulier, si F est un polynome de degré m en x, y et z et si f_1 est un polynome de degré n en x, y et z et de degré p en a, l'enveloppe présentera en général

$$m(n+p)(n+p-1)(n+p-2)$$

points possédant la particularité dont il s'agit.

Laissons pour le moment ces points et revenons au cas général.

L'une au moins des deux dérivés secondes n'est pas nulle. Supposons que ce soit $\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2}$.

De la troisième équation (7) nous pourrons tirer

$$a = \mu(x, y, z). \tag{20}$$

En portant cette expression de a dans les deux premières équations (7) on obtient les deux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} f_1(x, y, z, \mu) &\equiv F_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z, \mu) &\equiv F_2(x, y, z) = 0. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Puisque nous supposons l'existence d'une enveloppe pour l'une au moins des déterminations de μ, la courbe représentée par les équations (21) forme une branche située entièrement, dans le domaine du point considéré, sur la surface dont l'équation est

$$\frac{\partial f_2}{\partial a}(x, y, z, \mu) = 0. \tag{22}$$

Inversement, si, par une détermination de μ, la branche de la courbe définie par les équations (21) est située sur la surface représentée par l'équation (22), je dis que cette branche est bien une enveloppe. En effet, dans ce cas, les équations (21) et (20) permettent de tirer x, y, z en fonction de a tant que le jacobien $\frac{D(F_1, F_2, \mu)}{D(x, y, z)}$ n'est pas nul ; les valeurs correspondantes

satisfaisant à l'équation (22), il existe bien trois fonctions $x(a)$, $y(a)$, $z(a)$ satisfaisant aux quatre équations (7). La branche de courbe considérée, représentée par ces fonctions, est bien une enveloppe de la courbe C. Un calcul simple montre que le jacobien $\frac{D(F_1, F_2, \mu)}{D(x, y, z)}$ se réduit simplement au déterminant Δ_1. Si Δ_1 était nul on pourrait tirer x, y et z en fonction de a des équations (21) jointe à l'équation

$$\frac{\partial f_2}{\partial a} = 0;$$

les valeurs obtenues portées dans l'équation (20) y satisferaient identiquement. Une condition de légitimité du même genre que celle déjà rencontrée s'impose ici : c'est que le déterminant Δ_2 ne soit pas nul. Notre méthode cesse d'être applicable pour les systèmes de valeurs qui satisferaient à la fois aux conditions

$$(23) \qquad \Delta_1 = 0. \qquad \Delta_2 = 0.$$

C'est là un fait exceptionnel. Mais nous verrons plus loin que les points correspondants de l'enveloppe sont encore en général réguliers. Seule la représentation paramétrique au moyen du paramètre a tombe en défaut. La possibilité de ce dernier fait a déjà été indiquée au début de cette étude, car nous avons vu que les conclusions relatives à la représentation au moyen du paramètre a étaient subordonnées à la non-vérification simultanée des égalités (23) par les systèmes x, y, z, a étudiés.

Passons maintenant aux points de l'enveloppe pour lesquels on aurait à la fois

$$(24) \qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2} = 0.$$

Différentions les équations (7) après y avoir remplacé

x, y et z par les fonctions $f(a)$, $\varphi(a)$, $\psi(a)$ qui figurent dans les équations de l'enveloppe (9) ; on obtient, en tenant compte des deux dernières dans le résultat obtenu en différentiant les deux premières [1],

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x} f' + \frac{\partial f_1}{\partial y} \varphi' + \frac{\partial f_1}{\partial z} \psi' = 0, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x} f' + \frac{\partial f_2}{\partial y} \varphi' + \frac{\partial f_2}{\partial z} \psi' = 0, \\ &\frac{\partial^2 f_1}{\partial a\, \partial x} f' + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a\, \partial y} \varphi' + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a\, \partial z} \psi' + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 f_2}{\partial a\, \partial x} f' + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a\, \partial y} \varphi' + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a\, \partial z} \psi' + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si, au point étudié, les deux dérivées $\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2}$ sont nulles les équations (25) conduisent immédiatement au résultat suivant : les trois dérivées f', φ' et ψ' sont nulles pour ce point. Il ne peut y avoir exception que si les déterminants Δ_1 et Δ_2 sont nuls tous deux en même temps. Le point considéré sera donc en général un point singulier sur l'enveloppe. Donc :

Théorème. — *Si une courbe mobile dépendant d'un paramètre, définie par les équations*

$$f_1(x, y, z, a) = 0, \qquad f_2(x, y, z, a) = 0,$$

admet une enveloppe dont certains points appartiennent aussi à la courbe

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2} = 0,$$

---

[1] La considération de ces équations conduit à un résultat intéressant lorsque l'une des deux dérivées $\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2}$ est nulle sans que l'autre le soit. Le point de l'enveloppe, avons-nous vu, est alors régulier; f', φ' et ψ' ne sont pas nuls en général pour ce point et l'on conclut de là sans peine que le déterminant Δ_1 est nul.

ceux-ci seront des points, du genre rebroussement, de l'enveloppe de la courbe mobile étudiée. Cette proposition sera en général en défaut dans le cas tout à fait exceptionnel où les points en question appartiendraient en outre à la courbe (¹)

$$\Delta_1(x, y, z, a) = 0, \qquad \Delta_2(x, y, z, a) = 0.$$

En ces points l'enveloppe touche encore l'enveloppée.

Cette dernière partie reste à démontrer. La tangente de rebroussement à la courbe enveloppe admet pour paramètres directeurs les trois dérivées $f''(a)$, φ'', ψ''.

Or, si l'on différentie l'équation

$$f'\frac{\partial f_1}{\partial x} + \varphi'\frac{\partial f_1}{\partial y} + \psi'\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0,$$

on obtient la suivante :

$$f''\frac{\partial f_1}{\partial x} + \varphi''\frac{\partial f_1}{\partial y} + \psi''\frac{\partial f_1}{\partial z} + f'\frac{d}{da}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \varphi'\frac{d}{da}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \varphi'\frac{d}{da}\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0,$$

qui, au point considéré, se réduit à

$$f''\frac{\partial f_1}{\partial x} + \varphi''\frac{\partial f_1}{\partial y} + \psi''\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0.$$

On voit de même que les trois dérivées secondes f'', φ'', ψ'' vérifient, au point considéré, l'équation

$$f''\frac{\partial f_2}{\partial x} + \varphi''\frac{\partial f_2}{\partial y} + \psi''\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0.$$

(¹) Le manque de place ne nous permet pas de discuter complètement ce cas tout à fait spécial. Le lecteur pourra examiner deux dispositions différentes qui se présentent en examinant l'enveloppe de l'une ou de l'autre des deux paraboles

$$x^2 + 2\lambda y + (\lambda - 1)^3 = 0 \qquad x^2 + 2\lambda y + \lambda^3 = 0.$$

Les deux équations précédentes, homogènes en f'', φ'' et ψ'', étant précisément celles qui définissent les paramètres directeurs de l'enveloppée, notre proposition est complètement démontrée.

Des développements précédents résulte le corollaire suivant :

Corollaire. — *L'enveloppe d'une courbe déterminée par une surface fixe et une surface mobile présente en général des rebroussements* (¹).

Soient en effet

$$F(x, y, z) = 0, \qquad f(x, y, z, a) = 0$$

les équations de la courbe mobile. Les rebroussements de son enveloppe seront donnés par le système des quatre équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad f(x, y, z, a) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a) = 0,$$

qui, admettant en général des systèmes isolés de solutions communes, déterminent sur l'enveloppe au plus une suite discontinue de points de rebroussements. Leur nombre sera fini si les équations F et f sont algébriques, il a d'ailleurs été donné plus haut.

(¹) Elle présente aussi normalement des points réguliers pour lesquels la représentation paramétrique par a cesse d'être analytique car les deux équations $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ se réduisent dans ce cas à la seule équation $\Delta(x, y, z, a) = 0$ en posant

$$\Delta = \frac{D\left(F, f, \frac{\partial f}{\partial a}\right)}{D(x, y, z)}.$$

Ce résultat est évidemment applicable, comme celui du texte, aux enveloppes dans le plan.

Ce résultat s'applique immédiatement à l'enveloppe d'une famille de courbes planes mobiles dans un plan fixe.

Il nous reste à établir que, ainsi que nous l'avons annoncé, les points de l'enveloppe dont les coordonnées et la valeur correspondante du paramètre a vérifient les équations (23) ne présentent en général aucune particularité, en supposant bien entendu que les deux dérivées secondes $\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2}$ et $\frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2}$ n'y sont pas nulles en même temps. Supposons par exemple $\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0$; on peut alors tirer a en fonction de x, y et z de la troisième équation (7) :

$$a = \mu(x, y, z). \tag{26}$$

D'autre part, le point considéré étant, comme dans toute cette étude, supposé simple sur l'enveloppée, on pourra toujours tirer des équations de celle-ci deux des coordonnées en fonction de la troisième et du paramètre a ; par exemple

$$x = \chi_1(z, a), \qquad y = \chi_2(z, a). \tag{27}$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (26) on obtient la relation

$$\Theta(z, a) = \mu[\chi_1(a), \chi_2(a), z] - a = 0. \tag{28}$$

Mais on a

$$\frac{\partial \Theta}{\partial a} = \frac{\partial \mu}{\partial \chi_1}\frac{\partial \chi_1}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial \chi_2}\frac{\partial \chi_2}{\partial a} - 1,$$

et d'autre part les dérivées $\frac{\partial \chi_1}{\partial a}$ et $\frac{\partial \chi_2}{\partial a}$ satisfont évidem-

ment aux équations

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \chi_1}{\partial a} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \chi_2}{\partial a} + \frac{\partial f_1}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \chi_1}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \chi_2}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial a} = 0,$$

qui, en un point de l'enveloppe où $\frac{\partial f_1}{\partial a}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ sont nuls, entraînent

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial a} = \frac{\partial \chi_2}{\partial a} = 0 \quad (^1),$$

le mineur $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}$ n'étant pas nul aux environs de ce point puisque nous avons supposé légitime la formation du système (27). Dès lors, au point considéré, $\frac{\partial \theta}{\partial a}$ se réduit à -1. On en conclut que l'équation (28) définit a en fonction analytique de z aux environs du point étudié, soit

$$a = \alpha(z), \tag{29}$$

En portant ce résultat dans les équations (27) on obtient x et y en fonction analytique de z

$$x = \xi(z), \qquad y = \eta(z). \tag{30}$$

Le point considéré est donc un point ordinaire de l'enveloppe. On démontrerait, comme nous l'avons fait dans une étude précédente, que l'enveloppe touche encore l'enveloppée correspondante en ce point. Ce dernier est donc tout à fait régulier comme nous l'avions annoncé.

V. Afin d'éclairer cet exposé par quelques appli-

---

(1) On aurait pu prévoir ces relations en partant directement de la considération des équations (27).

cations. *J'étudierai sommairement les trois exemples suivants :*

1° Enveloppe de la droite déterminée par les deux équations

$$f_1(x, y, z, t) = x(3t - 2) - 2y - t^3 = 0,$$
$$f_2(x, y, z, t) = 2t^2 x - z - t^4 = 0;$$

on trouve sans peine que la droite admet une enveloppe dont les équations en fonction du paramètre t sont

$$x = t^2, \qquad y = t^2 - t^3, \qquad z = t^4;$$

l'origine est un rebroussement. L'application de notre méthode permettait de le prévoir. Les rebroussements de l'enveloppe doivent en effet s'obtenir en joignant aux équations de celle-ci les relations

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = -6t = 0, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = 4x - 3t^2 = 0.$$

L'ensemble de toutes ces équations admet le seul système de solutions

$$x = y = z = 0, \qquad t = 0.$$

Le point correspondant de l'enveloppe est l'origine, l'enveloppée correspondante est la droite

$$x = y, \qquad z = 0,$$

qui est bien, conformément à notre théorie, la tangente à l'enveloppe au point considéré.

2° Enveloppe de la droite mobile dans un plan donné représentée par l'équation suivante, dans laquelle λ est le paramètre variable et a une constante donnée :

$$2\lambda^3 x - 3(\lambda^2 + a^2)y + 6\lambda = 0.$$

L'emploi de notre méthode donne immédiatement

les coordonnées

$$x = \frac{1}{3a^2}, \qquad y = \frac{2}{\varepsilon\sqrt{3}}\frac{1}{a}, \qquad \lambda = \varepsilon a\sqrt{3} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

de deux rebroussements à distance finie. Je laisse au lecteur le soin de développer ces calculs et de retrouver ces résultats au moyen de l'étude directe de l'enveloppe, quartique unicursale.

3° Enveloppe de la parabole représentée par l'équation

$$x^2 + 2\lambda y + K^2(\lambda^2 + 1) = 0,$$

dans laquelle K est une constante donnée et λ le paramètre de la famille.

Ici nous ne trouvons plus de rebroussement. Dans le cas où la constante K serait nulle l'enveloppe dégénère en un point : l'origine. Lorsque K a une valeur quelconque on trouve deux points

$$x = 0, \qquad y = \varepsilon K^2 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

correspondant aux valeurs $\lambda = \varepsilon$ du paramètre λ pour lesquels le déterminant Δ est nul. En ces points la représentation de l'enveloppe au moyen de λ tombera en général en défaut, ainsi que nous l'avons vu : c'est ce qu'on vérifie immédiatement sur l'exemple actuel, les équations donnant les coordonnées d'un point de l'enveloppe étant

$$x = \pm K\sqrt{\lambda^2 - 1}, \qquad y = -K^2\lambda,$$

dont la première présente un branchement pour $\lambda = \pm 1$.

On vérifie facilement que cette courbe est une hyperbole admettant pour diamètres conjugués les axes de coordonnées et qu'elle touche bien l'enveloppée

correspondante aux points particuliers dont il vient d'être question.

VI. Dans les discussions précédentes nous avons laissé systématiquement de côté le *cas où les singularités formeraient une suite continue*. Nous allons maintenant examiner le cas où, quelle que soit la valeur de a, il existe en x, y, z une solution commune au système des six équations

$$(31) \qquad f_1(x, y, z, a) = 0, \qquad f_2(x, y, z, a) = 0,$$

$$(32) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial a} = 0,$$

$$(33) \qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2} = 0.$$

1° Si le système de solutions communes est fixe, c'est-à-dire si un ou plusieurs points fixes (x_i, y_i, z_i) satisfont, quelle que soit la valeur de a, aux six équations (31), (32) et (33), la courbe mobile passe par ces points fixes qui peuvent être considérés comme une enveloppe dégénérée. D'ailleurs, inversement, si la courbe mobile passe par un point fixe, les coordonnées de ce dernier et le paramètre a vérifieraient le système (31), (32), (33).

2° En général le système de solutions x, y, z correspondant à une valeur de a variera avec celle-ci. Autrement dit l'enveloppe aura une branche commune avec la courbe ayant pour équations les deux équations (33). Or, on peut toujours supposer que deux des coordonnées d'un point de la courbe mobile (C) représentée par les équations (31) peuvent, dans le voisinage d'un point régulier, s'exprimer en fonction de la troisième, par exemple y et z, en fonction de x; dans ces expressions figurera le paramètre a, qui, sur une courbe C, doit être regardé comme constant. Deux différentiations

successives donnent alors

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y} y'_x + \dfrac{\partial f_1}{\partial z} z'_x = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} y'_x + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} z'_x = 0, \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} H_1(x, y, z) \equiv \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + 2y'_x \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x\,\partial y} + 2z'_x \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial a\,\partial z} \\ \qquad + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(y'_x)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y\,\partial z} y'_x z'_x \\ \qquad - \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}(z'_x)^2 - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} y''_{x^2} - \dfrac{\partial f_1}{\partial z} z''_{x^2} = 0, \\ H_2(x, y, z) = \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \ldots \qquad + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} y''_{x^2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z} z''_{x^2} = 0. \end{cases}$$

Mais pour obtenir la branche commune aux courbes représentées respectivement par les équations (31), (32) et (33), il suffit de tirer a de l'une des équations (33), opération légitime sauf aux points (exceptionnels) où $\dfrac{\partial^3 f_1}{\partial a^3}$ et $\dfrac{\partial^3 f_2}{\partial a^3}$ seraient nuls et de porter le résultat $[a = \lambda(x, y, z)]$ dans les autres équations. On obtiendra ainsi les équations de cinq surfaces fixes ayant en commun la branche considérée. Désignons par $Y(x)$ et $Z(x)$ les fonctions qui donnent les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction de l'une d'elles, celle-ci étant la coordonnée x pour fixer les idées. En différentiant les équations (31) et tenant compte des équations (32), après substitution au paramètre a de la fonction $\lambda(x, y, z)$, on obtient les relations

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y} Y'_x + \dfrac{\partial f_1}{\partial z} Z'_x = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} Y'_x + \dfrac{\partial f_2}{\partial z} Z'_x = 0. \end{cases}$$

En comparant au système (34), on conclut

$$(37)\qquad Y'_x = y'_x, \qquad Z'_x = z'_x.$$

La branche de courbe considérée est donc tangente en ce point à la courbe mobile correspondante. C'est donc une branche d'enveloppe ordinaire. En différentiant les équations (36), toujours après substitution de la fonction λ au paramètre a, on obtient par un calcul facile

$$(38)\quad \begin{cases} H_1(x, Y, Z) + \dfrac{da}{dx}\left(\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial a\,\partial x} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial a\,\partial y} Y'_x + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial a\,\partial z} Z'_x\right) = 0, \\ H_2(x, Y, Z) + \dfrac{da}{dx}\left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial a\,\partial x} + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial a\,\partial y} Y'_x + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial a\,\partial z} Z'_x\right) = 0. \end{cases}$$

En différentiant les équations (32), on obtient sans peine

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial a\,\partial x} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a\,\partial y} Y'_x + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a\,\partial z} Z'_x = -\frac{da}{dx}\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2},$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial a\,\partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a\,\partial y} Y'_x + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a\,\partial z} Z'_x = -\frac{da}{dx}\frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2},$$

de telle sorte qu'en tout point de la branche d'enveloppe considérée, les équations (37) se réduisent, en vertu des équations (33), aux relations suivantes :

$$(39)\qquad H_1(x, Y, Z) = 0. \qquad H_2(x, Y, Z) = 0.$$

Si l'on compare aux équations (35) en tenant compte des équations (37) on trouve

$$Y''_{x^2} = y''_{x^2}. \qquad Z''_{x^2} = z''_{x^2}.$$

La branche d'enveloppe étudiée possède donc en chacun de ses points un contact du second ordre avec l'enveloppée correspondante. On fera une application intéressante de cette théorie en l'appliquant à l'étude de l'enveloppe d'un cercle mobile dans le plan et comparant avec les résultats connus [1].

---

[1] *Voir* par exemple : GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, n° 204.

Il resterait à voir ce que deviennent les propriétés de l'enveloppe aux points exceptionnels, lorsqu'ils existent, ou les dérivées $\frac{\partial^3 f_1}{\partial a^3}$, $\frac{\partial^3 f_2}{\partial a^3}$ sont nulles toutes deux. C'est une étude analogue à celle que nous venons de faire. Les points correspondants sont en général des singularités s'ils sont isolés et forment une enveloppe ordinaire possédant avec l'enveloppée un contact du troisième ordre s'ils forment une branche de courbes. Ces résultats se généralisent de proche en proche.

VII. *Enveloppe d'une courbe définie sous forme paramétrique.* — Nous venons d'établir la théorie des enveloppes des courbes données sous forme cartésienne. Il nous resterait à chercher à déterminer, lorsqu'elle existe, l'enveloppe d'une courbe mobile donnée sous forme paramétrique. L'exposé théorique de cette recherche serait très simplifié par le fait que nous pourrions faire usage de certaines propriétés qui nous sont acquises et qui sont indépendantes du mode de représentation de l'enveloppée. Il nous resterait à rechercher les conditions qui caractérisent alors les diverses singularités. Ne voulant pas charger outre mesure la présente étude, nous nous bornerons à ce simple exposé, renvoyant aux Traités classiques pour les calculs habituels relatifs à cette question.

[L²10a]

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES QUADRIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. M.-F. EGAN.

M. Bricard a démontré le théorème suivant (¹) :

Si l'on mène par une tangente variable à une ligne géodésique (ou à une ligne de courbure) d'une quadrique (P) *des plans tangents aux diverses quadriques homofocales à* (P), *ces plans forment un faisceau de grandeur constante.*

Ce théorème, comme l'a fait remarquer M. Bricard, fournit une nouvelle interprétation de l'intégrale première de l'équation différentielle que vérifient les lignes géodésiques. L'objet de cette Note est d'indiquer une démonstration de ce théorème qui mettra en évidence ses rapports avec l'interprétation classique de cette intégrale donnée par le théorème de Joachimsthal.

Considérons un système de quadriques homofocales à paramètre λ. Soient λ_1, λ_2 les quadriques du système qui touchent une droite L. Soit α le paramètre de l'une quelconque des quadriques, et soit A l'angle entre le plan tangent à λ_2 qui passe par L et l'un ou l'autre des plans tangents qu'on peut mener par L à α. On trouve sans peine la formule suivante (²) :

$$\lambda_1 \sin^2 A + \lambda_2 \cos^2 A = \alpha. \tag{1}$$

(¹) *Nouvelles Annales*, janvier 1908. — *Internacia Scienca Revuo*, janvier 1907.

(²) Voir *Nouvelles Annales*, juin 1907, p. 287.

Or, les théorèmes de M. Bricard et de Joachimsthal se déduisent immédiatement de cette formule.

Soit d'abord L une tangente variable à une ligne de courbure ou une ligne géodésique de la quadrique λ_1. Dans l'un et l'autre cas, la surface λ_2 est donnée; et, par conséquent, si l'on se donne la surface α, les deux valeurs supplémentaires de A sont données aussi; ce qui démontre le théorème de M. Bricard.

Soit, d'autre part, L la *normale* à la quadrique λ_3 en un point variable P d'une ligne géodésique. Alors λ_1 et λ_2 sont les deux autres surfaces du système qui passent par P. Soit α la surface touchée par les tangentes à la ligne géodésique; A sera alors, il est facile de le voir, l'angle entre la tangente en P à la ligne géodésique et l'une des lignes de courbure au même point. Cela posé, la formule (1) exprime précisément le théorème de Joachimsthal, sous la forme que lui a donnée Liouville [1].

La valeur de pD pour les points de la ligne géodésique s'exprime comme il suit en fonction des axes de la quadrique et du paramètre α de la surface touchée par les tangentes de la ligne géodésique.

Mettons $\lambda_3 = 0$, comme on peut évidemment le faire, et soit

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1$$

l'équation du système.

Alors on a (*voir* Salmon, *loc. cit.*)

$$\frac{1}{D^2} = \frac{\cos^2 A}{-\lambda_1} + \frac{\sin^2 A}{-\lambda_2},$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{abc},$$

---

[1] *Voir* Salmon, *Geometry of three dimensions*, ch. XII.

d'où

$$p^2 D^2 = \frac{-abc}{\lambda_2 \cos^2 A + \lambda_1 \sin^2 A},$$

ou, en tenant compte de l'équation (1),

$$p^2 D^2 = \frac{-abc}{\alpha}.$$

[L²21c]

SUR LES QUADRIQUES CIRCONSCRITES A DEUX SPHÈRES;

PAR M. R. BRICARD.

1. J'ai démontré antérieurement [1] le théorème suivant :

Si une droite varie en touchant constamment deux quadriques homofocales, les plans tangents menés par cette droite aux diverses quadriques homofocales aux deux premières forment un faisceau de grandeur constante.

Je me propose de démontrer dans cette Note une propriété toute semblable relative aux quadriques circonscrites à deux sphères et dont voici l'énoncé :

Si une droite varie en touchant constamment deux sphères, les plans tangents menés par cette droite aux diverses quadriques (nécessairement de révolution) circonscrites à ces deux sphères forment un faisceau de grandeur constante.

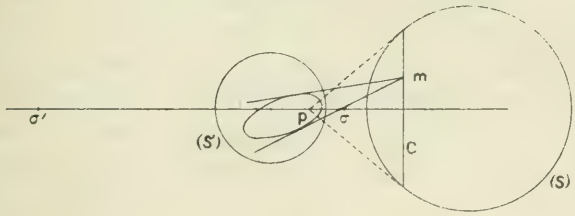
---

[1] *Nouvelles Annales*, 1908, p. 21.

La démonstration de ce théorème est, comme on va le voir, tout à fait analogue à celle du premier.

2. Soient (S) et (S′) deux sphères, (Q) l'une quelconque des quadriques de révolution qui sont circonscrites à ces deux sphères (*fig.* 1). Remarquons en pre-

Fig. 1.



mier lieu que la quadrique (Q) est complètement déterminée si l'on se donne le plan de son parallèle de contact C avec la sphère (S). Soit en effet m un point de ce parallèle. Les génératrices de (Q) qui passent par m sont nécessairement les deux tangentes menées de m au cercle suivant lequel le plan tangent à (S) coupe la sphère (S′). (Q) est engendrée par l'une ou l'autre de ces tangentes tournant autour de la ligne des centres des deux sphères (il est clair que les deux tangentes, étant symétriques par rapport au plan mené par m et la ligne des centres, engendrent la même quadrique).

On définira donc sans ambiguïté la quadrique (Q) au moyen d'un paramètre λ correspondant d'une façon univoque à la position du plan du cercle C. Je choisirai ce paramètre de la façon suivante : soient p le pôle du plan du cercle C par rapport à la sphère (S), et σ, σ' les centres de similitude des deux sphères. On

posera

$$\frac{p^{\sigma}}{p^{\sigma'}} = \lambda.$$

On voit que si $\lambda = 0$ ou ∞, la quadrique (Q) devient l'un des deux cônes de révolution circonscrits à (S) et à (S').

Soit maintenant D une droite fixe, tangente commune à (S) et (S'). Par D faisons passer un plan variable (P), auquel on fait correspondre d'une façon univoque un paramètre μ. On peut s'arranger de manière que le paramètre μ prenne les valeurs 0 et ∞ quand le plan (P) passe respectivement par les points σ et σ'. Cherchons de quelle forme doit être la relation

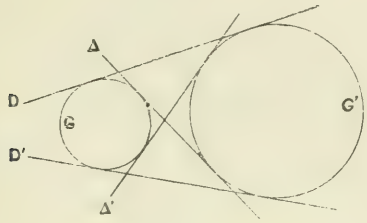
$$(1) \qquad f(\lambda, \mu)$$

reliant entre eux les paramètres λ et μ d'une quadrique (Q) et d'un plan (P) assujettis à être tangents entre eux.

Tout d'abord à une quadrique (Q) correspondent deux plans (P). La relation (1) est donc du second degré en μ. En second lieu, je dis que cette relation est du premier degré en λ. Il faut, pour le faire voir, montrer qu'il existe une seule quadrique (Q) tangente à un plan (P) passant par une droite D. Soient en effet (*fig.* 2) G et G' les cercles suivant lesquels le plan (P) coupe les sphères (S) et (S'). La quadrique (Q) doit couper le plan (P) suivant deux génératrices qui, devant toucher (S) et (S'), sont des tangentes communes à G et G'. D est l'une de ces tangentes communes. Appelons D' celle des autres tangentes communes qui coupe D en l'un des centres de similitude des deux cercles G et G'. D et D' engendrent, en tournant autour de la ligne des centres des deux sphères, une même

quadrique qui ne dépend pas du plan (P) et qui ne doit pas être considérée comme répondant à la question. La quadrique (Q) cherchée est donc nécessairement

Fig. 2.



engendrée par la rotation de l'une ou l'autre des deux autres tangentes communes Δ et Δ', et cette quadrique est bien unique.

Il est donc établi que la relation (1) est du premier degré en λ et du second degré en μ. Cette relation est de la forme

$$A\mu^2 + 2B\mu + C = 0. \tag{2}$$

A, B et C étant du premier degré en λ. Les deux valeurs de μ qui correspondent à une même valeur de λ deviendront égales si λ satisfait à la relation du second degré

$$B^2 - AC = 0. \tag{3}$$

Or, les deux plans (P) qui correspondent à une même quadrique (Q) ne peuvent être confondus que dans deux cas : d'abord si la quadrique (Q) est tangente à la droite D. Mais le raisonnement même qui précède montre que cela ne peut avoir lieu que si la quadrique (Q) contient la droite tout entière, cas à exclure. En second lieu, les deux plans seront confondus si la quadrique (Q) dégénère en un cône,

c'est-à-dire si le point p de la figure 1 vient en l'un des centres de similitude σ et σ'. La relation (3) a donc pour racines, d'après la manière dont le paramètre λ a été choisi, o et ∞.

Pour chacune des quadriques particulières dont il s'agit, les deux plans (P) viendront se confondre avec le plan qui passe par le centre de similitude correspondant; les racines doubles de l'équation (2) en μ, correspondant aux valeurs o et ∞ de λ sont donc respectivement o et ∞. Il est bien facile de conclure de là que la relation (1) est nécessairement de la forme

$$\mu^2 = K\lambda, \tag{4}$$

K étant une constante.

Soit alors D_1 une autre tangente commune aux deux sphères (S) et (S'). Par D_1 menons un plan tangent (P_1) à la quadrique variable (Q) et soit μ_1 le paramètre de ce plan, défini comme celui du plan (P). On a entre μ_1 et λ la relation

$$\mu_1^2 = K_1\lambda,$$

K_1 étant une nouvelle constante; d'où, par comparaison avec la relation (4),

$$\mu_1 = \pm\sqrt{\frac{K_1}{K}}\,\mu.$$

Ainsi (P) et (P_1) *engendrent des faisceaux homographiques.*

Parmi les quadriques (Q) circonscrites aux sphères (S) et (S') (quadriques qui doivent être considérées au point de vue *tangentiel*) figurent celles qui sont dégénérées en coniques : ce sont le cercle Γ commun aux deux sphères (S) et (S') et l'ombilicale. La considération de cette dernière prouve que, dans les fais-

ceaux homographiques engendrés par (P) et (P_1), les plans isotropes se correspondent. Autrement dit *ces faisceaux sont égaux*. On voit aussi que les plans tangents issus de D et de D_1 au cercle Γ se correspondent.

La forme de la relation (4) met un autre fait en évidence : *les paramètres des deux plans tangents issus de* D *à une même quadrique* (Q) *sont opposés*. Cela veut dire que ces deux plans engendrent des faisceaux en involution dont les plans doubles sont ceux qui passent par les points σ et σ'. Les plans isotropes issus de D se correspondant dans cette involution, les deux plans doubles sont rectangulaires et sont les plans bissecteurs de l'un quelconque des dièdres formés par les plans tangents issus de D à une même quadrique.

On peut résumer toute cette étude en énonçant les théorèmes suivants :

Soient S *et* S' *deux sphères,* D *une tangente quelconque commune à ces deux sphères. Considérons les diverses quadriques* (Q) *circonscrites à la fois à ces deux sphères. Les plans tangents issus de* D *à toutes les quadriques de ce système font deux à deux des angles indépendants de la position de la droite* D; *autrement dit, quand cette droite varie en restant tangente aux deux sphères, le faisceau formé par les plans tangents issus de* D *à toutes les quadriques* (Q) *constitue une figure de grandeur invariable.*

Les plans bissecteurs des plans tangents issus de D *à une même quadrique* (Q) *passent par les centres de similitude des deux sphères.*

En particulier les plans tangents issus de D *au*

cercle commun aux deux sphères forment un dièdre de grandeur constante et ses deux plans bissecteurs passent par les deux centres de similitude.

3. Pour compléter cette étude, je montrerai que *l'angle des deux plans dont il est question dans la dernière partie de cet énoncé est précisément égal à l'angle des deux sphères.*

Il ne serait pas difficile d'établir analytiquement ce résultat. Je préfère en donner une démonstration géométrique, qui m'a été indiquée par M. Fouché, à qui j'avais communiqué le résultat qui précède.

Soit m le point de contact de la droite D et de la sphère (S). Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant comme pôle le point m.

La sphère (S′) devient une sphère (Σ′). La sphère (S) devient un plan (Π) parallèle à la droite D, que la transformation change en elle-même.

Les deux plans tangents menés par D au cercle commun aux sphères (S) et (S′) sont également changés en eux-mêmes. Ils sont tangents au cercle commun à la sphère (Σ′) et au plan (Π).

Or l'angle de ces deux plans est manifestement égal à l'angle de la sphère (Σ′) et du plan (Π), comme on le voit tout de suite en faisant une projection orthogonale de la figure sur un plan perpendiculaire à D.

Comme l'angle de la sphère (Σ′) et du plan (Π) est égal à l'angle des deux sphères (S) et (S′), le théorème énoncé se trouve établi.

[111a]

NOTE AU SUJET D'UN ARTICLE DE M. S. CERVERA;

PAR M. C.-A. L.

La proposition très intéressante de M. S. Cervera [1] semble pouvoir se démontrer comme il suit avec un peu plus de simplicité :

Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ est

$$(x-1)(y-1), \quad \ldots,$$

les m variables étant liées par la relation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\ldots=1,$$

et ses variables étant positives, le minimum de cette fonction est obtenu pour

$$x=y=\ldots=m.$$

Donc

$$(x-1)(y-1)\ldots>(m-1)^m.$$

Remplaçant x par $\frac{1}{x_1}$, y par $\frac{1}{y_1}$, $\ldots$, on a

$$(1-x_1)(1-y_1)\ldots>(m-1)^m x_1 y_1 \ldots.$$

[1] *Voir* l'article intitulé *Généralisation d'une question de Wolstensholme* (*Nouvelles Annales*, 1908, p. 216).

CORRESPONDANCE.

M. **H. Brocard.** — Le très intéressant article de M. Deteuf : *Sur un point particulier du quadrilatère inscriptible* (1908, p. 442-448), n'est pas absolument nouveau. Les droites 3°, 5° et les quatre cercles désignés après le paragraphe 7° ont été déjà indiqués (*Mathesis*, 1901, p. 25-26) par M. Mathot, qui a également observé que ce point est le symétrique du centre O par rapport au point I milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

M. J. Neuberg (*loc. cit.*) a rappelé que les propriétés signalées dans cette Note étaient connues, du moins en partie.

Le lecteur, en effet, ne sera pas étonné d'apprendre que le point commun à quatre droites de Simson et aux quatre cercles d'Euler a été indiqué par M. E. Lemoine dans le présent journal (1869, question 908, p. 47), résolue avec figures, pages 174 et 317 (C.-A. Laisant, *Problèmes*, t. IV, p. 16-17).

M. **Lebesgue.** — A l'occasion de l'article de M. G. Lery (*Nouvelles Annales*, août 1908), je ferai une remarque, rapidement car elle n'est pas nouvelle et que je l'ai développée dans un petit article que doit publier la *Revue de l'Enseignement des Sciences* [1].

[1] Cet article a été écrit à l'occasion de travaux de M. Montel et de M. Thybaut publiés par la *Revue de l'Enseignement des Sciences*. M. G. Mouthon et d'autres auteurs ont adressé à cette occasion au Directeur de la *Revue* des remarques analogues à celle dont il s'agit ici.

Quand on raisonne comme le fait M. Lery, on prouve que, si les six conditions classiques d'équilibre sont remplies pendant un certain temps pour la position initiale du solide *et pour toutes les positions voisines*, il y a équilibre pendant le temps considéré, si les vitesses initiales sont nulles. On étudie ainsi un équilibre en un certain sens indifférent, mais on ne démontre pas que les six conditions d'équilibre, telles qu'on les comprend ordinairement, sont suffisantes et les conditions qu'on démontre être suffisantes ne sont, bien entendu, nullement nécessaires.

Si l'on suppose seulement, comme on prétend généralement le faire, que les vitesses initiales sont nulles et les conditions d'équilibre remplies pour la position initiale, les six équations du mouvement du solide, d'où tout doit se déduire, montrent seulement que les accélérations initiales sont nulles; mais il est des cas où ces équations fournissent d'autres solutions que le repos. Par exemple ce serait le cas pour un solide réduit à un point placé, sans vitesse initiale, à l'origine des coordonnées dans le champ de forces

$$X = \sqrt[3]{x}, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Si donc on veut à toute force que les conditions indiquées soient suffisantes pour l'équilibre, il faut faire cet acte de foi : il n'y a pas de mouvement dans lequel la vitesse et l'accélération s'annulent en même temps [1].

---

[1] Aux objections précédentes, on m'a répondu aussi : « Nous n'étudions en Mécanique que les cas où les équations du mouvement admettent des solutions déterminées d'une façon unique par les conditions initiales. Dès lors, pour les conditions indiquées, puisque le repos répond à la question, c'est la seule solution. »

Il suffit, pour répondre à cela et faire voir qu'on ne fait que déplacer la difficulté, de remarquer qu'on doit alors adopter l'énoncé quand les six conditions d'équilibre sont remplies et quand les équa-

C'est ce qu'on admet quand on construit la Statique avant la Dynamique, et l'on dit souvent alors que l'hypothèse n'est pas nouvelle, qu'elle est une conséquence de la définition newtonienne de la force : la force est la cause du mouvement ou des modifications du mouvement.

Il est généralement admis maintenant qu'on peut, sans manquer de respect à la mémoire de Newton, trouver cette définition peu claire ; mais ce qui est moins clair encore, c'est la conséquence indiquée qu'on en prétend tirer, car il me semble qu'on ne peut le faire sans nier aussi tout mouvement, autre que le mouvement uniforme, dans lequel l'accélération s'annule à un instant. Or, voyons les conséquences de cela.

Après avoir traité comme à l'ordinaire un problème de Mécanique, il nous faudra en reviser soigneusement la solution ; nous rechercherons si cette solution ne nous conduit pas à attribuer à un point matériel un mouvement dans lequel l'accélération s'annule à un instant et, si cela est, nous rejeterons la solution. C'est-à-dire que, si cette solution est l'unique solution mathématique, on affirmera que les données du problème (champ de forces et conditions initiales) sont incompatibles. Par exemple, on ne peut placer sans vitesse initiale un point matériel dans un champ de forces centrales attractives proportionnelles à la distance, puisque aucun mouvement matériel ne pourrait être un mouvement oscillatoire simple.

Par exemple encore, bien qu'un théorème de Kempe et Kœnigs nous apprenne à construire un système articulé dont deux sommets A et B décrivent Ox de façon

---

tions du mouvement admettent des solutions bien déterminées. il y a repos si les vitesses initiales sont nulles.

que leurs abscisses soient liées par la relation

$$x_A = (x_B)^3,$$

nous devons admettre que cet ensemble de barres n'est pas réalisable ou qu'il est impossible de donner à son sommet B un mouvement rectiligne et uniforme sur Ox dans lequel B passe en O [1].

Mais il faut bien admettre que ces mouvements que l'on déclare impossibles, que ces conditions que l'on dit incompatibles sont réalisables d'une façon si approchée que nous n'apercevons aucune différence entre les mouvements et conditions exactement réalisés et ceux, impossibles, que nous leur avions substitués.

Nous voilà donc arrivé à cette chinoiserie : la Mécanique rationnelle conduit parfois à des solutions inacceptables ; mais ces solutions, quand elles sont uniques, sont *toujours* d'accord avec l'expérience et, quand elles ne sont pas uniques, il se peut que des conditions initiales très voisines de celles supposées, et pratiquement indiscernables de celles-ci, conduisent à des résultats pratiquement indiscernables de ceux que nous avons rejetés.

Ne serait-il pas plus franc, puisque le résultat pratique est le même, de ne rejeter aucune solution et d'avouer qu'il est des cas où la Mécanique rationnelle ne suffit pas pour nous apprendre ce qui se passe. D'ailleurs, même dans ces cas, la résolution analytique du problème n'est pas inutile, car elle nous enseigne quels sont, dans la multitude des mouvements imaginables, ceux entre lesquels il nous faut choisir en utilisant les résultats fournis par l'observation ou l'expérience.

---

[1] Ici on utilise seulement l'inexistence d'un mouvement dans lequel la vitesse et l'accélération s'annulent à la fois.

Il me semble que, dès les classes de Mathématiques spéciales, on pourrait démontrer que les six conditions classiques sont nécessaires pour l'équilibre (ce qu'on fait) et que, si un système est placé sans vitesses initiales dans une position telle que tout déplacement imaginable à partir de la position initiale corresponde pendant un certain temps à un travail négatif ou nul des forces, il est en équilibre. Cette conséquence du théorème des forces vives fournit une méthode régulière et facile pour l'étude des machines simples. De plus, grâce à elle, on peut se passer de la théorie ordinaire des systèmes équivalents de vecteurs,

Si l'on s'adresse à des élèves connaissant la théorie des équations différentielles, on pourra leur faire remarquer que les six conditions d'équilibre sont suffisantes toutes les fois que, pour les conditions initiales indiquées, la solution des équations différentielles du mouvement est unique, et le théorème signalé plus haut apparaîtra alors comme délimitant un cas particulièrement simple dans lequel la solution est déterminée.

M. **J. Rose**. — Dans le numéro de novembre 1908 des *Nouvelles Annales* (p. 504), M. Têtu indique une construction du centre de courbure en un point M d'une ellipse. J'ai donné cette construction ainsi que de nombreuses autres dans *Mathesis* (1903, p. 90) par la considération des propriétés de l'hexagone de Pascal.

M. **Retali**. — La question 2104 est identique à la question 667 posée par Catalan dans le Tome II des *Nouvelles Annales* (1863, p. 372).

La question 2106 est celle que j'ai posée sous le n° 751 dans le *Periodico di Matematico* (t. XXIII, 1908, p. 286).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2099.

(1908, p. 178.)

Si l'on considère les trois équations

$$(1)\qquad \frac{a}{b-x}+\frac{b}{x-a}+\frac{x}{a-b}=0,$$

$$(2)\qquad \frac{a}{(b-x)^2}+\frac{b}{(x-a)^2}+\frac{x}{(a-b)^2}=0,$$

$$(3)\qquad \sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{b-a},$$

l'équation (2) *du cinquième degré contient les trois racines de l'équation* (1).

Les deux autres racines de (2) *sont racines doubles de l'équation* (3) *qui a six racines.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. J. Rose.

Les équations (1) et (2) s'écrivent encore

$$(1')\qquad \begin{cases} x^3-(a+b)x^2-(a^2+b^2-3ab)x \\ \qquad\qquad +(a+b)(a-b)^2=0, \end{cases}$$

$$(2')\qquad \begin{cases} x^5-2(a+b)x^4+(a^2+b^2+4ab)x^3 \\ \quad +(a+b)(a^2+b^2-4ab)x^2 \\ \quad -[2(a-b)^2(a^2+b^2)-a^2b^2]x \\ \qquad\qquad +(a^3+b^3)(a-b)^2=0. \end{cases}$$

Or le premier membre de (2′) est égal au premier membre de (1′) multiplié par l'expression

$$x^2-(a+b)x+a^2+b^2-ab$$

qui s'annule pour

$$(4)\qquad x=\frac{(a+b)\pm(a-b)\sqrt{3}}{2}.$$

Donc l'équation (2) contient les racines de (1).

Pour résoudre l'équation (3), on pose

$$x - a = y^7, \qquad b - x = z^7, \qquad b - a = c^7;$$

on est ainsi ramené au système

$$y + z = c, \qquad y^7 + z^7 = c^7;$$

Or, on a successivement

$$y^7 + z^7 = (y + z)^7 - 7yz(y + z)^5$$
$$- 14y^2z^2(y + z)^3 - 7y^3z^3(y + z)$$

ou

$$c^7 = c^7 - 7yzc^5 + 14y^2z^2c^3 - 7y^3z^3c$$

ou

$$yz(yz - c^2)^2 = 0,$$

qui se décompose en

$$y = 0, \qquad z = 0, \qquad yz = c^2.$$

Les deux premières donnent

$$x = a, \qquad x = b,$$

et la troisième donne l'équation comptée deux fois

$$(x - a)(b - x) = (b - a)^2.$$

Or, cette dernière admet pour racines les valeurs (4). Donc les racines doubles de (3) sont les racines de (2) qui ne satisfont pas à (1). De plus, l'équation (3) a six racines.

QUESTIONS.

2121. On demande d'établir les propriétés suivantes de la suite (U) de Fibonacci, définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - u_{n-1},$$

avec

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1 :$$

1° Si α désigne un nombre premier, la suite (U) contient une infinité de termes multiples de α. Soit u_A le plus petit de ces termes. Le nombre A divise $\alpha - 1$ si

$$\alpha = \text{mult.}\, 10 \pm 1$$

et $\alpha + 1$ si

$$\alpha = \text{mult.}\, 10 \pm 3.$$

2° Si p désigne un nombre premier, on a

$$u_p = \text{mult.}\, 2p + 1 \qquad \text{si} \qquad p = \text{mult.}\, 10 \pm 1$$

et

$$u_p = \text{mult.}\, 2p - 1 \qquad \text{si} \qquad p = \text{mult.}\, 10 \pm 3.$$

Si u_p n'est pas premier, ses facteurs premiers sont de la forme

$$2kp \pm 1.$$

En désignant par α, β, γ, ... ces facteurs, on a

$$u_p = \alpha\beta\gamma\ldots.$$

Alors u_p est le plus petit nombre de la suite divisible séparément par les nombres premiers α, β, γ, ...

G. Hilleret.

2122. Étant donné un quadrilatère plan circonscriptible à un cercle, on divise chaque côté en deux segments proportionnels aux longueurs des côtés adjacents. Démontrer que les quatre points obtenus sont sur un même cercle.

Clapier.

2123. L'enveloppe des cercles qui ont leur centre sur un cercle donné et qui sont tangents à un diamètre fixe de ce cercle est une épicycloïde à deux rebroussements.

E.-N. Barisien.

2124. Si S_1, S_2, S_3 sont les sommes des termes d'une progression arithmétique quelconque, de leurs carrés et de leurs cubes, on a toujours

$$9S_2^2 > 8S_1S_3.$$

E.-N. Barisien.

2125. Si deux triangles sont tels que leurs côtés se coupent deux à deux orthogonalement en trois points situés sur une même droite, cette droite passe par le milieu du segment limité par les orthocentres des deux triangles.

JAN DE MÉZÉAS.

ERRATA.

1908, p. 413, ligne 2, *lire* $x = -\sqrt{u}$.

1908, p. 421, ligne 12, *lire :* parallèle à BC.

1908, p. 422, ligne 12, *lire :* divise harmoniquement.

1908, p. 432 (solution de la question 2067). *Il manque* la phrase suivante :

Soient H et H′ les projections de M et M′ sur AB, CD le diamètre perpendiculaire à AB, P le point commun à AB et CD.

1908, p. 573 (solution de la question 2087), ligne 13 : *au lieu de*

$$\frac{1+t^2}{4t^2}\,\frac{A'}{\sqrt{A}}$$

lire

$$\frac{1+t^2}{4t}\,\frac{A'}{\sqrt{A}};$$

lignes 16 et 18, supprimer le facteur 2.

1908, p. 580 (Table des matières). *Il manque :*

Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1908 (*Mathématiques spéciales*); solution par M. *P. Favre*..... 506

[H11c]

UNE DÉFINITION FONCTIONNELLE DES POLYNOMES;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Cauchy a montré par une méthode bien connue [1] que la fonction réelle $f(x)$ la plus générale vérifiant l'identité

$$f(x+y) \equiv f(x) + f(y),$$

quelles que soient les variables réelles x, y, est de la forme $f(x) \equiv Ax$, A désignant une constante réelle pourvu qu'on suppose $f(x)$ continue.

On en déduit immédiatement la définition du polynome le plus général du premier degré (à coefficients et à variables réels) comme la solution la plus générale parmi les fonctions continues réelles $f(x)$ vérifiant l'identité

$$f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0) \equiv 0.$$

Je me propose de montrer ici qu'on peut généraliser cette définition et l'étendre aux polynomes à un nombre fini (et même infini) de variables.

Dans tout ce qui suit je supposerai implicitement que tous les nombres (coefficients ou variables) intervenant dans mes raisonnements sont réels.

[1] *Voir* par exemple NIEWENGLOWSKI, *Cours d'Algèbre de Math. spéciales*, t. I, p. 385.

Polynomes a une variable.

Théorème. — *Un polynome de degré n en x est une fonction continue vérifiant l'identité*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}) - \sum_n f(x_{i_1}+\ldots+x_{i_n}) \\ & \qquad + \sum_{n-1} f(x_{i_1}+\ldots+x_{i_{n-1}}) - \ldots \\ & \qquad + (-1)^n \sum_n f(x_{i_1}) + (-1)^{n+1} f(0) \equiv 0, \end{aligned}\right.$$

quelles que soient les constantes $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sans vérifier les identités analogues obtenues en remplaçant l'entier n par un entier inférieur.

Dans l'identité (1), le symbole $\sum_k$ indique qu'on doit faire la somme de tous les termes obtenus en remplaçant, dans le terme qui suit ce symbole, les nombres $i_1, \ldots, i_k$ par une quelconque des combinaisons k à k des entiers $1, 2, \ldots, n+1$.

Le théorème que nous venons d'énoncer constitue évidemment une définition fonctionnelle des polynomes. Ce théorème, évident quand $n = 0$, résulte pour $n = 1$ de la proposition de Cauchy rappelée plus haut. Pour le démontrer dans le cas le plus général, il suffit de prouver que, s'il est vrai lorsqu'on remplace n par $0, 1, 2, \ldots, n-1$, il est vrai pour la valeur n.

Remarquons d'abord que, si x_{n+1} désigne une constante arbitraire et $f(x)$ une fonction continue vérifiant l'identité (1), la fonction continue

$$\varphi(x) \equiv f(x+x_{n+1}) - f(x) - f(x_{n+1}) + f(0)$$

est un polynome de degré $(n-1)$ au plus. En effet, on

voit facilement que l'expression

$$\varphi(x_1+\ldots+x_n)-\sum_{n-1}\varphi(x_{j_1}+x_{j_2}+\ldots+x_{j_{n-1}})$$
$$+\sum_{n-2}\varphi(x_{j_1}+\ldots+x_{j_{n-2}})-\ldots+(1)^{n-1}\sum_{1}\varphi(x_{j_1})+(-1)^n\varphi(0)$$

est nulle quels que soient $x_1, \ldots, x_n$ ($j_1, j_2, \ldots, j_k$ représentant une quelconque des combinaisons k à k des n nombres seulement $1, 2, \ldots, n$) comme étant identique au premier membre de (1). Le théorème étant supposé vrai jusqu'à $n-1$, il en résulte que, quels que soient x et x_{n+1}, $\varphi(n)$ est bien de degré $n-1$ au plus en x. Alors l'expression

$$(2)\qquad f(x+y)-f(x)-f(y)+f(0)\equiv Q(x, y),$$

étant symétrique en x et y, est un polynome en x et en y qui est de degré $(n-1)$ au plus par rapport à x et par rapport à y séparément. Nous allons montrer qu'en vertu de l'identité (2) ce polynome a une forme particulière. En effet, on a d'abord, d'après (2),

$$Q(x, y)+Q(x+y, z)$$
$$\equiv f(x+y+z)-f(x)-f(y)-f(z)+2f(0),$$

quelles que soient les variables x, y, z. Le premier membre est donc une fonction symétrique de x, y, z. En écrivant $Q(x, y)$ sous la forme

$$(3)\quad Q(x, y)\equiv Q_0+Q_1(x, y)+Q_2(x, y)+\ldots+Q_p(x, y),$$

chacun des termes désignant un polynome homogène par rapport à l'ensemble des variables x, y, on voit immédiatement que chacun d'eux $Q_p(x, y)$ satisfera à cette même condition, c'est-à-dire que la fonction

$$Q_p(x, y)+Q_p(x+y, z)$$

devra être symétrique en x, y, z. Or, Q_p est de la

forme

$$Q_p(x, y) \equiv A_0 x^p + A_1 x^{p-1} y + A_2 x^{p-2} y^2 + \ldots + A_p y^p,$$

d'où

$$\begin{aligned}
&Q_p(x, y) + Q_p(x + y, z) \\
&\quad \equiv 2 A_0 x^p + (A_1 y + A_0 C_p^1 y + A_1 z) x^{p-1} + \ldots \\
&\qquad + [A_h y^h + A_0 C_p^h y^h + A_1 C_{p-1}^{h-1} y^{h-1} z + A_2 C_{p-2}^{h-2} y^{h-2} z^2 + \ldots \\
&\qquad\qquad + A_{h-1} C_{p-h+1}^1 y z^{h-1} + A_h z^h] x^{p-h} + \ldots \\
&\qquad + [A_p y^p + A_0 y^p + A_1 z y^{p-1} + A_2 z^2 y^{p-2} + \ldots + A_p z^p].
\end{aligned}$$

Les coefficients des différentes puissances de x devront être symétriques en x, y; on voit qu'on aura en particulier

$$A_0 = 0. \qquad A_{h-1} = A_1 \frac{C_{p-h+1}^{h-1}}{C_{p-h+1}^1} \qquad (\text{pour } h = 2, \ldots, p).$$

D'ailleurs, Q_p étant symétrique en x, y, on aura

$$A_p = A_0;$$

et comme

$$\frac{C_{p-h+1}^{h-1}}{C_{p-h+1}^1} = \frac{C_p^{h-1}}{C_p^1},$$

on aura

$$\begin{aligned}
p Q_p &= C_p^1 A_1 x^{p-1} y + \ldots + C_p^{h-1} A_1 x^{p-h+1} y^{h-1} + \ldots \\
&\quad + C_p^{p-1} A_1 x y^{p-1} \equiv A_1 [(x + y)^p - x^p - y^p].
\end{aligned}$$

En appliquant ce résultat aux polynomes $Q_0, \ldots, Q_r$ on voit que l'on aura pour Q une expression de la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned}
Q(x, y) &\equiv \sum_{p=2}^{p=r} B_p [(x + y)^p - x^p - y^p] \\
&\equiv R(x + y) - R(x) - R(y) - R(0),
\end{aligned} \right.$$

en appelant $R(x)$ le polynome de degré r

$$R(x) \equiv B_2 x^2 + \ldots + B_r x^r,$$

avec $r \leq n$, puisque $Q(x, y)$, qui est de degré $r - 1$ en x, doit être en x de degré $n - 1$ au plus.

La solution est maintenant immédiate. En posant

$$S(x) \equiv f(x) - R(x),$$

l'identité (2) devient, moyennant (4),

$$S(x+y) - S(x) - S(y) - S(0) \equiv 0.$$

$S(x)$ étant une fonction continue qui doit vérifier cette identité quels que soient x, y, on a vu que $S(x)$ est nécessairement un polynome du premier degré $(B_2 x + B_0)$.

On a donc

$$f(x) \equiv S(x) + R(x) \equiv B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_r x^r$$

avec

$$r \leq n.$$

Il est bien démontré que $f(x)$ est nécessairement un polynome de degré x au plus.

Inversement tout polynome de degré n vérifie l'identité (1). — Il suffit de démontrer que l'identité (1) est satisfaite quand on y remplace $f(x)$ par x^r avec $r \leqq n$. Or, le premier membre devient alors

$$(x_1 + \ldots + x_{n+1})^r - \sum_n (x_{i_1} + \ldots + x_{i_n})^r + \ldots + (-1)^n \sum_1 x_{i_1}^r.$$

Chacune des puissances qui y figurent est de la forme

$$\sum \frac{r!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_r!} x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots x_{i_r}^{\alpha_r} \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = r),$$

où plusieurs des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_2$ peuvent être nuls en remplaçant alors $0!$ par 1.

On voit que le coefficient est le même ; il suffit donc de montrer que les nombres de fois que ce terme se trouve précédé du signe + ou du signe — s'équilibrent. Or, en prenant par exemple le terme

$$\sum \frac{r!}{\beta_1! \ldots \beta_s!} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_s^{\beta_s}$$

où maintenant nous supposons tous les $\beta \neq 0$, le total dont nous venons de parler est égal à

$$\begin{aligned} &1 - C_{n+1-s}^{n-s} + C_{n+1-s}^{n-1-s} - \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-s} C_{n+1-s}^{1} + (-1)^{n+1-s} = (1-1)^{n+1-s} = 0. \end{aligned}$$

La réciproque est ainsi démontrée.

Polynomes a plusieurs variables.

Un polynome de degré n par rapport à l'ensemble de r variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ est une fonction continue par rapport à l'ensemble de ces variables, qui vérifie l'identité

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &f(x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \ldots + x_1^{(n+1)}, x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + \ldots + x_2^{(n+1)}, \\ &\qquad \ldots, x_r^{(1)} + \ldots + x_r^{(n+1)}) \\ &- \sum_n f(x_1^{(i_1)} + x_1^{(i_2)} + \ldots + x_1^{(i_n)}, \ldots, x_r^{(i_1)} + \ldots + x_r^{(i_n)}) \\ &+ \sum_{n-1} f(x_1^{(i_1)} + \ldots + x_1^{(i_{n-1})}, \ldots, x_r^{(i_1)} + \ldots + x_r^{(i_{n-1})}) - \ldots \\ &+ (-1)^n \sum_1 f(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_1)}, \ldots, x_r^{(i_1)}) + (-1)^{n+1} f(0) \equiv 0 \end{aligned} \right.$$

[où les signes $\sum_k$ indiquent que l'on fait la somme de tous les termes obtenus en prenant pour $i_1, i_2, \ldots, i_k$ l'un quelconque des arrangements k à k des nombres $(1, 2, \ldots, n+1)$] *quelles que soient les valeurs des*

$r(n+1)$ *quantités* $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n+1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}$.

En effet, soit

$$f(x_1, \ldots, x_r)$$

une fonction continue satisfaisant à l'identité (5); posons

$$\varphi(x) \equiv f(x, 0, 0, \ldots, 0), \qquad \psi(x) = f(xx_1, xx_2, \ldots, xx_r).$$

En faisant dans l'identité (5)

$$x_k^{(1)} = x_k^{(2)} = \ldots = x_k^{(n+1)} = 0$$

pour $k = 2, 3, \ldots, r$, on voit qu'elle peut s'écrire

$$\varphi(x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \ldots + x_1^{(n+1)}) - \sum_n \varphi(x_1^{(i)} + \ldots + x_1^{(i_n)}) + \ldots$$
$$+ (-1)^n \sum_1 \varphi(x_1^{(i_1)}) + (-1)^{n+1} \varphi(0) = 0.$$

D'après le paragraphe précédent, $\varphi(x)$ est donc un polynome de degré n au plus.

De même, en faisant dans l'identité (5)

$$x_k^{(j)} = y_j x_k,$$

elle pourra s'écrire

$$\psi(y_1 + \ldots + y_{n+1}) - \sum_n \psi(y_{i_1} + \ldots + y_{i_n})$$
$$+ \sum_{n-1} \psi(y_{i_1} + \ldots + y_{i_{n-1}}) + \ldots$$
$$+ (-1)^n \sum_1 \psi(y_{i_1}) + (-1)^{n+1} \psi(0) \equiv 0,$$

quelles que soient les constantes arbitraires $y_1, \ldots, y_{n+1}$. Donc $\psi(x)$ est un polynome de degré n au plus.

Il suffit maintenant de prouver que $f(x_1, \ldots, x_r)$ satisfaisant à (5) est un polynome pour démontrer le

théorème. Car alors f est de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) \equiv \sum A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_r^{\alpha_r},$$

et l'on a

$$\psi(x) = \sum A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_r^{\alpha_r} x^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r}.$$

$\psi(x)$ étant au plus de degré n et comme en supposant f réduit il n'y aura *a fortiori* aucune réduction dans $\psi(x)$ si les x_i sont arbitraires, on voit que

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_r \leq n,$$

c'est-à-dire que $f(x_1, \ldots, x_2)$ est bien de degré n au plus par rapport à l'ensemble des variables $x_1, \ldots, x_r$.

Or, le théorème est évident pour $n = 0$; dans le cas de $n = 1$, l'identité (5) devient

$$\begin{aligned} &f(x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, x_2^{(1)} + x_2^{(2)}, \ldots, x_r^{(1)} + x_r^{(2)}) \\ &\quad - f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}) - f(x_2^{(2)}, \ldots, x_r^{(2)}) + f(0, \ldots, 0) = 0. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} &f(x_1 + 0, 0 + x_2, \ldots, 0 + x_r) \\ &\quad - f(x_1, 0, \ldots, 0) - f(0, x_2, \ldots, x_r) + f(0, \ldots, 0) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \ldots, x_r) \\ &\quad \equiv f(x_1, 0, \ldots, 0) + f(0, x_2, \ldots, x_r) - f(0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Comme ici

$$\varphi(x) \equiv f(x, 0, \ldots, 0)$$

est au plus du premier degré, on voit que $f(x_1, \ldots, x_2)$ est, par rapport à x_1, un polynome du premier degré au plus. Par analogie, il en sera de même par rapport à $x_2, \ldots, x_r$ pris séparément. C'est donc un polynome par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_2$, et, d'après la re-

marque faite plus haut, ce polynome sera au plus du premier degré non pas seulement par rapport à chacune des variables, mais par rapport à leur ensemble.

Ainsi le théorème est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons-le vrai jusqu'à $n - 1$ et soit $f(x_1, \ldots, x_2)$ une fonction continue satisfaisant à l'identité (5). Posons

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) \\ &\quad \equiv f(x_1 + x_1^{(n+1)}, x_2 + x_2^{(n+1)}, \ldots, x_r + x_r^{n+1}) \\ &\qquad - f(x_1, \ldots, x_r) - f(x_1^{(n+1)}, \ldots, x_r^{n+1}) + f(0, 0, \ldots, 0). \end{aligned} \right.$$

On verra de la même manière que pour les polynomes à une variable que $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ satisfait à une identité analogue à (5), mais où n est remplacé par $n - 1$.

D'après notre hypothèse, φ serait donc un polynome de degré $n - 1$ au plus par rapport à l'ensemble des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Ceci étant vrai, quelles que soient les quantités $x_1^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}$, l'expression

$$\begin{aligned} &P(y_1, y_2, \ldots, y_r) \\ &\quad \equiv f(y_1 + 0, 0 + y_2, \ldots, 0 + y_r) + f(y_1, 0, 0, \ldots, 0) \\ &\qquad - f(0, y_2, \ldots, y_r) + f(0, 0, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

sera un polynome en y_1. Cette identité peut s'écrire

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \ldots, y_r) = f(y_1, 0, \ldots, 0) &+ f(0, y_2, \ldots, y_r) \\ &- f(0, 0, \ldots, 0) + P(y_1, y_2, \ldots, y_r), \end{aligned}$$

et nous avons vu que $f(y_1, 0, \ldots, 0)$ est aussi un polynome en y. Donc $f(y_1, y_2, \ldots, y_r$ est également un polynome en y et, par symétrie, sera un polynome en $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Ce polynome, d'après ce que nous avons déjà remarqué, sera d'ailleurs nécessairement de degré n au plus.

Démontrons maintenant *la réciproque*.

Je dis que tout polynome en $x_1, \ldots, x_r$ de degré au plus égal à n satisfait à l'identité (5).

Il suffit évidemment de le prouver pour un monome de la forme

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_1 + \ldots + \alpha_r \leqq n.$$

Pour cela, désignons le premier membre de (5) par le symbole

$$\bigvee_{x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n+1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}} f(x_1, \ldots, x_r)$$

qui n'est pas nul en général. On a évidemment

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}} c_1 f_1(x_1, \ldots, x_r) + c_2 f_2(x_1, \ldots, x_r) + \ldots + c_q f_q(x_1, \ldots, x_r) \\
&\quad = c_1 \bigvee_{x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}} f_1(x_1, \ldots, x_r) \\
&\qquad + c_2 \bigvee_{x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}} f_2(x_1, \ldots, x_r) + \ldots + c_q \bigvee_{x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}} f_q(x_1, \ldots, x_r),
\end{aligned}$$

quelles que soient les fonctions $f_1, \ldots, f_q$ et les constantes $c_1, \ldots, c_q$. On aura donc

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\bigvee_{x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}} (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r)^p \\
&\quad \equiv \sum \frac{p!}{\alpha_1! \ldots \alpha_r!} \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_r^{\alpha_r} \bigvee_{x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}} x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r} \\
&\qquad (\text{avec } \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = p),
\end{aligned} \right.$$

quelles que soient les constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Or, le premier membre développé

$$\begin{aligned}
&[\lambda_1 (x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \ldots + x_1^{(n+1)}) + \ldots + \lambda_r (x_r^{(1)} + \ldots + x_r^{(n+1)})]^p \\
&\quad - \sum_n [\lambda_1 (x_1^{(i_1)} + \ldots + x_1^{(i_n)}) + \ldots + \lambda_r (x_r^{(i_1)} + \ldots + x_r^{(i_n)})]^p + \ldots \\
&\quad + (-1)^n \sum_1 (\lambda_1 x_1^{(i_1)} + \ldots + \lambda_r x_r^{(i_1)})^p
\end{aligned}$$

peut s'écrire plus simplement, en posant

$$t = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r, \qquad t_i = \lambda_1 x_1^{(i)} + \ldots + \lambda_r x_r^{(i)}$$
$$(i = 1, \ldots, n+1)$$

sous la forme

$$(t_1 + \ldots + t_{n+1})^p - \sum (t_{i_1} + \ldots + t_{i_n})^p$$
$$+ \sum (t_{i_1} + \ldots + t_{i_{n-1}})^p + \ldots + (-1)^n \sum t_{i_1}^p,$$

c'est-à-dire

$$\mathop{\mathrm{V}}_{t_1, \ldots, t_{n+1}} t^p.$$

Or, d'après le paragraphe précédent concernant le cas d'une variable, cette quantité est nulle pour $p \leqq n$, puisque t^p sera alors un polynome en t degré $\leqq n$. En définitive, le premier membre de (7) est nul pour $p \leqq n$ quelles que soient les constantes $\lambda_1 \ldots, \lambda_r$. Le second membre étant un polynome en $\lambda_1 \ldots, \lambda_r$ devra être identiquement nul, c'est-à-dire que tous ses coefficients seront nuls. En d'autres termes, l'expression

$$\mathop{\mathrm{V}}_{x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}} x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r}$$

est nulle quand la somme des entiers $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$ est au plus égale à n. C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — On simplifie l'écriture de l'identité fonctionnelle (5) au moyen de notations convenables. Désignons d'une façon générale par M l'ensemble des r quantités $m_1, m_2, \ldots, m_r$ (l'ordre n'étant pas indifférent); de sorte que par exemple l'ensemble des r nombres $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_r^{(i)}$ sera représenté par $X^{(i)}$. Représentons de même par F_M la valeur de la fonction

$f(m_1, m_2, \ldots, m_r)$, de sorte que par exemple

$$\Phi_{X^{(i)}} \equiv \varphi(x_1^{(i)}, x_2^{i}, \ldots, x_r^{i}).$$

Enfin, représentons d'une façon générale l'ensemble des r nombres $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$, ..., $x_r + y_r$ par le symbole $X + Y$.

On voit alors que *tout polynome de degré n, à un nombre quelconque r de variables, sera une fonction continue par rapport à l'ensemble de ces variables, $f(x_1, \ldots, x_r)$ satisfaisant à l'identité*

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & F_{X^{(1)}+X^{(2)}+\ldots+X^{(n+1)}} - \sum_{n} F_{X^{(1)}+X^{(2)}+\ldots+X^{(n)}} \\ & + \sum_{n-1} F_{X^{(1)}+\ldots+(n-1)} - \ldots + (-1)^n \sum_{1} F_{X^{(1)}} - (-1)^{n+1} F_0 \equiv 0, \end{aligned}\right.$$

en appelant F_0 la quantité $f(0, 0, \ldots)$.

On voit que cette identité conserve toujours la même forme, pour une valeur déterminée de n, quand le nombre r des variables varie.

POLYNOMES A UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE DE VARIABLES.

La remarque précédente montrant que l'identité fonctionnelle (5) peut s'écrire sans faire intervenir le nombre de variables dont dépend la fonction, on est amené à se servir de cette identité pour définir les polynomes dépendant d'une infinité de variables.

Nous pouvons en effet concevoir des fonctions d'une suite infinie de variables [1]. Seulement, il peut arriver que ces fonctions ne soient définies que quand les variables varient dans un certain champ. Étant donnée

---

[1] Par exemple, la somme d'une série convergente dépend de la valeur de chacun de ses termes; une fonction continue est déterminée par l'ensemble dénombrable de ses valeurs aux points d'abscisses rationnelles, etc

une suite infinie de nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots$, on pourra la désigner par le symbole X et l'on représentera par $X + Y$ la suite $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_r + y_r, x_{r+1} + y_{r+1}, \ldots$.

Une fonction

$$F_X = f(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots)$$

sera *définie dans* (C) si, à tout symbole

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots),$$

pris dans un certain champ (C), correspond un nombre F_X bien déterminé. Nous pourrons alors généraliser la définition d'un polynome pour un champ (C) quelconque, pourvu que ce champ soit tel que si X et Y lui appartenait; il en est de même de $X + Y$.

Dans ces conditions, nous pourrons appeler *polynome de degré n à une suite infinie de variables, une fonction continue*

$$F_X \equiv f(x_1, x_2, \ldots)$$

satisfaisant à l'identité (8) *et ne satisfaisant pas à une identité analogue où n serait remplacé par un nombre entier inférieur.*

Pour compléter cette définition, il faudrait définir exactement la continuité d'une fonction d'une infinité de variables. Pour plus de généralité, je supposerai seulement que, si la fonction

$$F_X \equiv f(x_1, x_2, \ldots)$$

est continue, elle est continue au sens ordinaire par rapport à tout ensemble d'un nombre fini de ses variables et que l'on a

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots) = \lim_{r=\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots),$$

c'est-à-dire qu'en désignant par X_r l'ensemble x_1, $x_2, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots$, on a

$$F_X = \lim_{r=\infty} F_{X_r}.$$

Dans ces conditions, on voit que, si F_X est continue et satisfait à l'identité (8), la fonction

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r) \equiv F_{X_r} \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

est continue par rapport à l'ensemble de ses r variables et satisfait à l'identité (5). Elle représente donc un polynome de degré n par rapport à ces r variables

$$P_r(x_1, \ldots, x_r).$$

On a donc

$$\begin{aligned} F_X &= \lim_{r=\infty} F_{X_r} \lim_{r=\infty} P_r(x_1, \ldots, x_r) \\ &= P_0 + [P_1(x_1) - P_0] + [P_1(x_1, x_2) - P_1(x_1)] + \ldots \\ &\quad + [P_r(x_1, \ldots, x_r) - P_{r-1}(x_1, \ldots, x_{r-1})] + \ldots. \end{aligned}$$

De plus, on a évidemment

$$P_{r-1}(x_1, \ldots, x_{r-1}) \equiv P_r(x_1, \ldots, x_{r-1}, 0).$$

Donc

$$\begin{aligned} &P_r(x_1, \ldots, x_r) - P_{r-1}(x_1, \ldots, x_{r-1}) \\ &\quad \equiv P_r(x_1, \ldots, x_r) - P_r(x_1, \ldots, x_{r-1}, 0) \\ &\quad \equiv x_r Q_r(x_1, \ldots, x_r), \end{aligned}$$

où Q_r est un polynome de degré $n - 1$ au plus. Ainsi l'on peut écrire

$$(9) \quad \begin{cases} F_X \equiv P_0 + x_1 Q_1(x_1) + x_2 Q_2(x_1, x_2) + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + x_r Q_r(x_1, \ldots, x_r) + \ldots. \end{cases}$$

en sorte que F_X est la somme d'une série de polynomes de degré n dont aucun coefficient ne peut se réduire avec ceux des autres polynomes. D'où l'on conclut que F_X ne peut pas se mettre de deux manières sous la

forme (9); autrement dit, que deux polynomes équivalents et de degré n, à une suite infinie de variables, ont nécessairement mêmes coefficients [une fois mis sous la forme (9)].

Réciproquement, tout polynome à une infinité de variables qui est de la forme (9) et convergent dans (C) vérifie l'identité (8) dans le champ (C).

En effet, si $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots)$ est un tel polynome, on a

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots) = \lim_{r=\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

et $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots)$ est un polynome de degré n à r variables qui, comme nous l'avons vu, vérifie l'identité

$$\begin{aligned} &f(x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+\ldots+x_1^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(1)}+x_r^{(2)}+\ldots+x_r^{(n+1)}, 0, 0, \ldots) \\ &\quad -\sum_n f(x_1^{(i_1)}+\ldots+x_1^{(i_n)}, \ldots, x_r^{(i_1)}+\ldots+x_r^{(i_n)}, 0, 0, \ldots)+\ldots \\ &\quad +(-1)^n \sum_1 f(x_1^{(i_1)}, \ldots, x_r^{(i_n)}, 0, 0, \ldots)+(-1)^n f(0, 0, \ldots, 0, \ldots)=0. \end{aligned}$$

Si donc

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}, x_{r+1}^{(1)}, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X^{(n+1)} &= (x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}, x_{r+1}^{(n+1)}, \ldots) \end{aligned}$$

appartiennent au champ (C) où F_X est défini, le premier membre de cette expression tendra vers le premier membre de l'identité (8), qui se trouve ainsi vérifiée.

Je n'ai pas précisé la notion de continuité d'une fonction d'une suite infinie de variables. On peut la définir ainsi. Supposons qu'à deux suites quelconques de variables $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ faisant partie du champ C, on puisse faire correspondre un nombre $(X^{(1)}, X^{(2)}) \geq 0$

qui ne s'annule que si $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont formées de deux suites de variables respectivement égales et tel de plus que, quels que soient, dans le champ C, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$, on ait

$$(X^{(1)}, X^{(2)}) \leqq (X^{(1)}, X^{(3)}) + (X^{(2)}, X^{(3)}).$$

On pourra appeler $(X^{(1)}, X^{(2)})$ l'écart des deux points $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ [1]. Nous supposerons aussi que, si $(X^{(1)}, X^{(2)})$ tend vers zéro, les différences $(x_i^{(1)} - x_i^{(2)})$ des « coordonnées » de même rang de $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ tendent vers zéro et que l'écart des points

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots) \quad \text{et} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots)$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Enfin, nous admettrons que le champ (C) contient toutes les suites X dont les termes sont nuls à partir d'un rang arbitraire.

Alors nous pourrons dire que F_X est une fonction continue de X si F_Y tend toujours vers F_X quand l'écart (Y, X) tend vers zéro.

Pour donner un exemple précis nous pouvons nous placer successivement au point de vue suivant:

1° Le champ C est formé par toutes les suites infinies possibles $(x_1, x_2, \ldots)$, et nous prenons, pour définir l'écart, la quantité [2]

$$(X, Y) = \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{1}{2}\frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \ldots.$$

Il est facile de voir qu'elle satisfait à toutes les conditions précédentes et que pour que (X, Y) tende vers

---

(1) *Voir* ma Thèse : *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, p. 30.

(2) *Loc. cit.*, p. 39.

zéro, il faut et il suffit que $(x_1 - y_1)$, $(x_2 - y_2)$, ..., $(x_n - y_n)$, ... tendent respectivement et *indépendamment* vers zéro. Alors, une fonction continue $f(x_1, x_2, \ldots)$ est une fonction telle que, si $y_1, y_2 \ldots$ tendent ensemble (uniformément ou non) vers x_1, $x_2, \ldots, f(y_1, y_2, \ldots)$ tend vers $f(x_1, x_2, \ldots)$.

2° Le champ C est limité aux suites de variables $(x_1, x_2, \ldots)$, telles que la suite des carrés de ces variables $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots)$ soit une série convergente. Il est facile de voir que, si X et Y appartiennent au champ, il en est de même de X + Y.

Nous prendrons alors, pour définir l'écart, l'expression convergente [1]

$$(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots},$$

qui satisfait encore aux conditions précédentes. [Mais, ici, il ne suffit plus que $(x_1 - y_1)$, $(x_2 - y_2)$, ... tendent vers zéro pour que (X, Y) tende vers zéro.]

Les théorèmes démontrés précédemment s'appliquent dans ces deux conventions.

Remarque. — La forme (9) permettrait de définir directement les polynomes à une infinité de variables. Mais la définition par l'identité (9) apparaît comme plus générale, car elle seule s'étend sans modification aux *fonctionnelles* [2] d'ordres entiers, comme je le montrerai ailleurs [3].

---

(1) *Voir* ce même Recueil, FRÉCHET, *Essai de Géométrie analytique à une infinité de coordonnées*, 1re série, t. VIII, juillet 1908, p. 1, 23.

(2) *Voir*, par exemple, HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*, p. 282, sous presse chez Hermann, ou FRÉCHET, *Sur les opérations linéaires* (*Transactions of the american mathematical Society*).

(3) *Voir* FRÉCHET, *Toute fonctionnelle continue est dévelop-*

Fonctions analytiques.

Nous avons montré dans ce qui précède comment on peut définir les *polynomes* par une condition fonctionnelle. Il est assez naturel de chercher à étendre ce procédé à des fonctions plus générales que les polynomes. Sans développer ici cet ordre d'idées, je me bornerai à énoncer le théorème suivant :

Soit $f(x)$ une fonction développable en série entière dans un intervalle $(-R, +R)$. Si x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sont des quantités arbitraires, mais telles que les sommes d'un nombre quelconque d'entre elles $(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_r})$ restent toutes en valeurs absolues inférieures à un nombre fixe $k < \frac{R}{2}$, on a

$$\lim_{n=\infty}\left[f(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}) - \sum_n f(x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}) + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^n \sum_1 f(x_{i_1}) + (-1)^{n+1} f(0)\right] = 0.$$

Si $R = \infty$, *il suffit de prendre pour k un nombre* fini *arbitraire.*

[M²1b]

SUR LES SURFACES POSSÉDANT UNE DROITE MULTIPLE;

Par M. Lucien GODEAUX.

Dans cette Note, nous donnons une démonstration simplifiée d'un théorème dû à M. G. Fouret sur le

---

pable en série de fonctionnelles d'ordres entiers (*Comptes rendus* du 18 janvier 1909).

nombre des plans tangents à une surface algébrique menés par une droite multiple de cette surface [1]. Ensuite, nous calculons la classe d'une telle surface.

1. Soit F une surface algébrique d'ordre n possédant comme seule singularité une droite d multiple d'ordre $r\,(r < n)$. Soit ν le nombre de plans passant par d et touchant la surface F en un point non situé sur d.

Choisissons un plan quelconque π ne passant pas par d. Tout plan α passant par d rencontre la surface F suivant une courbe C_α d'ordre $n - r$ et le plan π suivant une droite d'. Évidemment le nombre ν cherché est égal au nombre des courbes C_α douées d'un point double, car la polaire d'ordre $n - r - 1$ d'un tel point par rapport à la C_α qui le contient peut être une droite quelconque du plan de cette courbe, en particulier d'; donc nous devons d'abord chercher l'ordre k de la courbe K lieu des pôles des droites d' par rapport aux courbes C_α.

Le nombre k est évidemment égal au nombre de courbes C_α qui touchent le plan π; donc, d'après une formule connue,

$$k = (n + r)(n - r - 1).$$

Les pôles d'une droite par rapport à une courbe d'ordre $n - r$ sont au nombre de

$$(n - r - 1)^2;$$

donc la courbe K rencontre la droite d en

$$(2r + 1)(n - r - 1)$$

points.

---

[1] *Sur le nombre de plans tangents qu'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface*

Pour trouver ν, il nous suffira de compter le nombre de points où K rencontre F ailleurs que sur d ou dans le plan π; on trouve

$$\nu = (n - r - 1)[n(n + r - 1) - 2r(r + 1)].$$

Le nombre des plans tangents menés à une surface d'ordre n par une droite multiple d'ordre r, le point de contact n'étant pas sur cette droite, est égal à

$$(n - r - 1)[n(n + r - 1) - 2r(r + 1)].$$

On connaît de nombreux cas particuliers de cette formule, notamment pour $r = n - 2$ (¹).

2. Rappelons un théorème de MM. Zeuthen et Segre (²) :

Étant donné sur une surface un faisceau rationnel de courbes de genre p, doué de σ points de base et de δ courbes à point double (simple pour la surface), le nombre

$$I = \delta - \sigma - 4p$$

ne dépend pas du faisceau considéré.

Formons l'expression I pour notre surface F par la considération des courbes C_α. Évidemment, il n'existe

---

(*Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo,* 1894, t. VIII, p. 202-208).

(¹) L. Godeaux, *Notes de Géométrie* (*Mémoires de la Soc. des Sc. de Liége*, 1908, 3e série, t. VIII); *A propos d'un article de M. H. Bateman* (*Archiv der Mathematik und Physik,* 1908, 3e série, t. XIII, p. 370).

(²) G. Castelnuovo et F. Enriquès, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (*Annali di Matematica,* 1901, 3e série, t. VI, p. 162-225).

pas de points de base, puisque nous avons supposé F n'ayant que la droite multiple comme singularité; donc $\sigma = 0$. Nous venons de trouver

$$\delta = (n - r - 1)[n(n + r - 1) - 2r(r + 1)].$$

Enfin, le genre p de C_α est donné par une formule bien connue :

$$p = \frac{1}{2}(n - r - 1)(n - r - 2).$$

Donc

$$(1) \qquad I = (n - r - 1)[n(n + r - 3) - 2(r^2 - 2)].$$

Considérons maintenant les sections planes de F situées dans les plans d'un faisceau et calculons l'invariant de Zeuthen-Segre au moyen de ce système de courbes. En appelant m la classe de F, on trouve

$$\delta = m \qquad \text{et} \qquad \sigma = n.$$

Une section plane de F contient un point multiple d'ordre r, donc équivalent à $\frac{1}{2}r(r - 1)$ points doubles, et, par suite,

$$p = \frac{1}{2}[(n - 1)(n - 2) - r(r - 1)].$$

De là, une nouvelle expression de I :

$$(2) \qquad I = m - (n - r - 1)(2n + 2r - 3) - (r + 1).$$

En égalant les deux expressions de I, on trouve

$$m = (n - r - 1)[n(n + r - 1) - r(2r - 1)] + (r + 1)(n - r).$$

Une surface d'ordre n possédant comme seule singularité une droite multiple d'ordre r est de la classe

$$(n - r - 1)[n(n + r - 1) - r(2r - 1)] + (r + 1)(n - r).$$

3. Supposons que la surface F possède, sur la droite multiple d, ρ points multiples d'ordre $r+1$. Évidemment, on a

$$\rho \leqq n - r.$$

Alors l'expression (1) de l'invariant de Zeuthen-Segre doit être modifiée, car le faisceau considéré a ρ points de base. Il en résulte que la classe m de la surface F est diminuée de ρ unités.

4. Nous allons donner une application des résultats précédents aux complexes de coniques.

Soit Σ un complexe de coniques d'ordre μ et de classe ν [caractéristiques de M. Montesano (¹)].

Les coniques du complexe situées dans les plans d'un faisceau engendrent une surface d'ordre $2\mu+\nu$ possédant une droite multiple d'ordre ν. D'après le théorème de M. Fouret, il y a

$$(2\mu-1)^2(2\mu+3\nu)$$

plans tangents à cette surface menés par la droite multiple, c'est-à-dire un nombre égal de coniques dégénérées.

Les plans des coniques dégénérées d'un complexe d'ordre μ et de classe ν enveloppent une surface de classe

$$(2\mu-1)^2(2\mu+3\nu).$$

5. L'extension aux hyperespaces peut se faire aisément; nous nous bornerons à donner ici le résultat.

Si l'on désigne par $\nu_{(p,n,r)}$ le nombre d'espaces linéaires à $p-1$ dimensions tangents à une variété

(¹) *Una estensione della proiettivita a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette* (*Annali di Matematica*, 1898, 3e série, t. I, p. 313).

d'ordre n à $p-1$ dimensions et passant par un espace linéaire à $p-2$ dimensions multiple d'ordre r pour la variété, on a

$$\nu_{(p,n,r)} = (n-r-1)\left[\nu_{(p-1,n,r)} + r(n-r-1)^{p-2}\right].$$

De cette formule on tire par un calcul très simple

$$\nu_{(p,n,r)} = (n-r-1)^{p-2}\left\{n[n+r(p-2)-1] - r(p-1)(r+1)\right\}.$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1908). COMPOSITION SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTEGRAL [1].

SOLUTION PAR M. C. CLAPIER.

I. Lorsque le paramètre α varie, la famille Γ a en général une enveloppe Γ, définie par les équations (1) et (2). Par hypothèse, l'équation (3) est aussi satisfaite pour tous les points $m(\xi, \eta)$ de cette courbe; nous aurons donc, en dérivant les deux premières,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial x}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial x}\frac{dy}{d\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x=\xi, \quad y=\eta.$$

De ces nouvelles équations il résulte que : ou bien $\frac{d\xi}{d\alpha}, \frac{d\eta}{d\alpha}$ sont nuls et par suite les courbes C passent par

---

[1] *Voir* l'énoncé page 426 du Tome précédent.

un point fixe $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$; ou bien on a la condition

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial y}.$$

Dans ce dernier cas, la courbe C a, avec son enveloppe Γ, un contact du second ordre : en effet, déterminons, par dérivations par rapport à x, les expressions y' et y'' correspondant au point $m(x, y)$ de la courbe Γ ; en tenant compte de ce que $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ sont nuls en ce point, nous avons les deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial y} y'\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = 0.$$

Si

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = \frac{d\alpha}{dx} - y' \frac{d\alpha}{dy}$$

n'est pas nul, la condition (4) exprime que les valeurs de y' et y'' sont les mêmes soit qu'on suppose α variable, soit qu'on suppose α constant, et, comme dans ce dernier cas on se déplace sur la courbe C, on voit que l'enveloppée et l'enveloppe ont au point m un contact du second ordre.

II. Appliquons ce résultat au cas particulier où les courbes C sont homothétiques à une courbe fixe C_0 représentée par l'équation

$$Y = \varphi(X).$$

Le point de contact $m(x, y)$ de l'enveloppe Γ est

l'homologue du point M(X, Y) de C_0, et l'on a

$$(5)\qquad \begin{cases} X = x_0 + \varkappa(x - x_0) \\ Y = y_0 + \varkappa(y - y_0) \end{cases} \qquad \frac{SM}{Sm} = \varkappa.$$

Les coordonnées x_0 et y_0 du centre S et le rapport d'homothétie $\varkappa$ sont fonctions du paramètre α; avec ces notations l'équation générale des courbes C pourra s'écrire

$$f = \varphi(X) - Y = 0.$$

Les équations (2) et (4) deviendront

$$\varphi'(X)\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \qquad \text{et} \qquad \varphi''(X)\frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0.$$

Si donc on suppose que la courbe C_0 n'est pas une droite, nous aurons les équations très simples

$$(6)\qquad \frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = 0.$$

Elles expriment qu'on a

$$\frac{dX}{d\alpha} = \varkappa\frac{dx}{d\alpha}, \qquad \frac{dY}{d\alpha} = \varkappa\frac{dy}{d\alpha},$$

c'est-à-dire que les éléments d'arc, aux points M et m, des courbes C_0 et Γ, sont homologues, résultat géométrique évident.

Quant à l'équation (4), elle prendra la forme

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha^2} = \varphi'(X)\frac{\partial^2 X}{\partial \alpha^2}.$$

Pour avoir son interprétation géométrique, calculons le rayon de courbure de la courbe C_0,

$$R = \frac{(dX^2 + dY^2)^{\frac{3}{2}}}{dX\,d^2Y - dY\,d^2X};$$

nous avons, en dérivant deux fois les expressions (5),

$$\frac{d^2 X}{d\alpha^2} = \varkappa \frac{d^2 x}{d\alpha^2} + \frac{dx}{d\alpha}\frac{d\varkappa}{d\alpha} + \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha^2},$$
$$\frac{d^2 Y}{d\alpha^2} = \varkappa \frac{d^2 y}{d\alpha^2} + \frac{dy}{d\alpha}\frac{d\varkappa}{d\alpha} + \frac{\partial^2 Y}{\partial\alpha^2};$$

d'où, en remarquant que

$$\varphi'(X) = \frac{dY}{dX},$$

et tenant compte en outre de l'équation (7),

$$dY\, d^2 X - dX\, d^2 Y = \varkappa^2 (dy\, d^2 x - dx\, d^2 y),$$
$$dX^2 + dY^2 = \varkappa^2 (dx^2 + dy^2).$$

Donc

$$R = \varkappa r,$$

r étant le rayon de courbure au point m de Γ, et les centres de courbure aux points correspondants de C_0 et Γ sont deux points homologues, résultat géométrique facile à prévoir.

Si la courbe C_0 est un cercle de rayon R, son homothétique est un cercle de rayon r, qui est osculateur à l'enveloppe Γ. La famille F est constituée par l'ensemble des cercles osculateurs à une courbe fixe.

On pouvait donc, sans se servir de la théorie générale (I), trouver les équations (6) et (7) en exprimant que le cercle de courbure de la courbe C_0 a pour homologue le cercle de courbure de l'enveloppe Γ; comme un cercle est déterminé par trois points, il est bien clair que l'enveloppée C a même cercle de courbure que son enveloppe Γ.

Les équations (6) nous donnent, en développant,

$$(8) \qquad \frac{x - x_0}{\frac{dx_0}{d\alpha}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy_0}{d\alpha}} = \frac{\varkappa - 1}{\frac{d\varkappa}{d\alpha}}.$$

Pour avoir les conditions demandées, il suffit de porter ces valeurs de x et y dans (5) et (7); on a

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= x_0 + \varkappa(\varkappa - 1)\frac{dx_0}{d\varkappa} \\ Y &= y_0 + \varkappa(\varkappa - 1)\frac{dy_0}{d\varkappa} \end{aligned}\right\} \qquad Y = \varphi(X),$$

$$\frac{(\varkappa - 1)\left(\frac{dy_0}{d\varkappa}\frac{d^2\varkappa}{d\alpha^2} - \frac{d^2 y_0}{d\alpha^2}\right) - 2\frac{dy_0}{d\alpha}\frac{d\varkappa}{d\alpha}}{(\varkappa - 1)\left(\frac{dx_0}{d\varkappa}\frac{d^2\varkappa}{d\alpha^2} - \frac{d^2 x_0}{d\alpha^2}\right) - 2\frac{dx_0}{d\alpha}\frac{d\varkappa}{d\alpha}} = \varphi'(X).$$

Supposons qu'on donne la courbe C_0, de manière que ses coordonnées puissent s'exprimer, à l'aide du paramètre α, par les équations (9).

1° Si l'on connaît les expressions des coordonnées de S, on connaîtra

$$\frac{\varkappa(\varkappa - 1)}{\frac{d\varkappa}{d\alpha}} = \frac{1}{F(\alpha)};$$

d'où, en intégrant,

$$\varkappa = \frac{1}{1 - e^{u \cdot \alpha)}}.$$

2° Si l'on se donne les coordonnées x_1 et y_1 du point O′, défini par l'égalité

$$\frac{SO}{SO'} = \varkappa,$$

nous aurons

$$x_1 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}x_0, \qquad dx_1 = \frac{d\varkappa}{\varkappa^2}x_0 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}dx_0$$

et

$$X = \varkappa(\varkappa - 1)\frac{dx_0}{d\varkappa} + x_0 = \varkappa^2\frac{dx_1}{d\varkappa};$$

donc la détermination de $\varkappa$ revient à effectuer la quadrature

$$\frac{d\varkappa}{\varkappa^2} = F(\alpha)\,d\alpha.$$

III. Les équations (8) nous donnent les coordonnées x et y des points de l'enveloppe, en fonction du paramètre α :

$$x = x_0 + (\varkappa - 1)\frac{dx_0}{d\varkappa},$$

$$y = y_0 + (\varkappa - 1)\frac{dy_0}{d\varkappa}.$$

Si l'on suppose

$$\frac{d\varkappa}{d\alpha} \neq 0,$$

x et y sont des fonctions régulières de α, représentées par des séries entières.

Or, par hypothèse, $\varkappa$ passe par un maximum ou un minimum dans l'intervalle (α_1, α_2); donc pour cette valeur α de l'intervalle $\frac{d\varkappa}{d\alpha}$ est nul et deux cas peuvent se présenter :

Ou bien $\frac{dx_0}{d\alpha}$ et $\frac{dy_0}{d\alpha}$ ne sont pas nuls simultanément et le point correspondant de l'enveloppe s'éloigne indéfiniment ;

Ou bien le point S est un point de rebroussement sur la courbe qu'il décrit, et il en est de même du point O_1, de coordonnées

$$x_1 = (1 - \varkappa)x_0, \qquad y_1 = (1 - \varkappa)y_0,$$

sur la courbe qu'il décrit.

Plus généralement, si l'on pose

$$x_1 = x_0 + \varkappa(a - x_0),$$
$$y_1 = y_0 + \varkappa(b - x_0),$$

a et b étant les coordonnées d'un point fixe ω du plan, on aura

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{dy_1}{d\alpha} = 0$$

et ce point $O_1(x_1 y_1)$ est aussi un point de rebroussement.

Remarquons que, dans le premier cas, la tangente au point S, à la courbe lieu des centres d'homothétie, est une direction asymptotique de la courbe C_0.

Dans le second cas, les rapports $\frac{dx_0}{dz}$ et $\frac{dy_0}{dz}$ ont pour limites

$$\frac{d^2 x_0}{d\alpha^2} : \frac{d^2 z}{d\alpha^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 y_0}{d\alpha^2} : \frac{d^2 z}{d\alpha^2}.$$

IV. Si nous prenons une famille F de surface Σ, satisfaisant aux équations

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$$

pour tous les points m de leur enveloppe Γ, nous verrons comme dans le cas des courbes que : ou bien $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dy}{d\alpha}$ sont nuls en tous les points de Γ, c'est-à-dire que x et y ne dépendent que d'un paramètre z et les surfaces passent par une ligne fixe; ou bien on a les conditions

$$(9) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial z}$$

qui expriment que les trois sections de l'enveloppe parallèles aux plans coordonnés, menées par le point $m(x, y)$, ont un contact du second ordre avec les trois sections planes de l'enveloppée correspondante; donc, en chaque point de la ligne de contact de Σ et de Γ, nous avons mêmes éléments différentiels du second ordre pour les deux surfaces.

Appliquons au cas où les surfaces Σ sont homothétiques à une surface fixe Σ_0; nous aurons comme dans

le cas des courbes

$$(9')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\,\dfrac{\partial X}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial X\,\partial Y}\,\dfrac{\partial Y}{\partial \alpha} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial X\,\partial Y}\,\dfrac{\partial X}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2}\,\dfrac{\partial Y}{\partial \alpha} = 0, \end{cases}$$

en supposant que $z = \varphi(XY)$ soit l'équation de Σ_0. On en déduit que, si cette surface ne se réduit pas à une courbe, elle doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial X\,\partial Y}.$$

On voit que Σ_0 doit être une surface développable, et il en est nécessairement de même de l'enveloppe Γ, dont les plans tangents sont les homologues des plans tangents de Σ_0.

Si celle-ci est une courbe gauche, nous aurons des équations analogues aux relations (8) et les mêmes déterminations de $\varkappa$ pour les deux questions analogues de la deuxième partie. On aura les mêmes résultats si l'on remplace la surface développable Σ_0 par son arête de rebroussement; il est clair que l'arête de rebroussement de l'enveloppe est l'enveloppe des arêtes de rebroussement des surfaces Σ.

V. Si l'on imagine que la courbe matérielle C_0 se déplace dans son plan suivant une certaine loi, elle enveloppe une courbe Γ; ce mouvement pourra être obtenu par le roulement d'une courbe C' sur une autre courbe fixe Γ'.

Soit M le point de contact des deux premières; la normale à l'enveloppe en ce point va passer par le centre instantané I, et l'on obtiendra le centre de courbure Γ par la construction d'Euler-Savary.

Il résulte de cette construction que, pour que ce

centre coïncide avec le centre de courbure de C, il faut en général qu'il soit confondu avec le point I. Donc, pour que C ait un contact du second ordre avec son enveloppe, il faudra que la roulette C′ soit la développée de la courbe donnée C_0; la courbe Γ′ étant quelconque sera à son tour la développée de l'enveloppe Γ.

CORRESPONDANCE.

Un abonné. — Un lecteur du Journal a rappelé, l'an dernier, cette remarque de Sylvester : Étant donné un tétraèdre, si F, G, H, K désignent les expressions des carrés des aires des faces en fonction des arêtes, la norme de l'expression

$$\sqrt{F}+\sqrt{G}+\sqrt{H}+\sqrt{K},$$

soit

$$\begin{aligned} N = \; & (\sqrt{F}+\sqrt{G}+\sqrt{H}+\sqrt{K})(\sqrt{F}+\sqrt{G}-\sqrt{H}-\sqrt{K})(\ldots)(\ldots) \\ & \times(-\sqrt{F}+\sqrt{G}+\sqrt{H}+\sqrt{K})(\sqrt{F}-\sqrt{G}+\sqrt{H}+\sqrt{K})(\ldots)(\ldots), \end{aligned}$$

contient en facteur l'expression V^2 du carré du volume en fonction des arêtes, *puisque l'hypothèse* $N = 0$ *entraîne la conclusion* $V = 0$.

Sylvester, considérant la formule

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & \overline{ab}^2 & \overline{ac}^2 & \overline{ad}^2 & 1 \\ \overline{ba}^2 & 0 & \overline{bc}^2 & \overline{bd}^2 & 1 \\ \overline{ca}^2 & \overline{cb}^2 & 0 & \overline{cd}^2 & 1 \\ \overline{da}^2 & \overline{db}^2 & \overline{dc}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

et observant que les mineurs principaux sont, à un même facteur numérique près, F, G, H, K et une expression qu'il n'y a pas lieu de considérer, affirme, sans le démontrer, que le fait en question correspond à une propriété générale des déterminants symétriques dont la diagonale principale est formée d'éléments nuls. M. Thomas Muir, écartant cette restriction, a confirmé comme il suit l'affirmation de Sylvester (*Transactions of the South African Philosophical Society*, Vol. XVI; *The Messenger of Mathematics*, new series, n° 435; 1907).

Soit le déterminant symétrique

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (a_{ij} = a_{ji});$$

si l'on a

$$\Delta = 0,$$

on a entre les premiers mineurs les relations

$$A_{11}A_{22} = A_{12}^2, \qquad A_{11}A_{33} = A_{13}^2, \qquad \dots, \qquad A_{11}A_{nn} = A_{1n}^2$$

ou

$$\frac{A_{11}}{\sqrt{A_{11}}} = \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{22}}} = \frac{A_{13}}{\sqrt{A_{33}}} = \dots = \frac{A_{1n}}{\sqrt{A_{nn}}};$$

on a, par suite,

$$a_{11}\sqrt{A_{11}} + a_{12}\sqrt{A_{22}} + a_{13}\sqrt{A_{33}} + \dots + a_{1n}\sqrt{A_{nn}} = 0;$$

la norme du premier membre de cette égalité contient donc Δ *en facteur, et il en est de même quand on remplace* $a_{11}, a_{12}, \dots$ *par* $a_{i1}, a_{i2}, \dots$.

Autrement : dans l'hypothèse $\Delta = 0$, le détermi-

nant

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & \dots & w \\ x & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ y & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est, au signe près, le carré de l'expression

$$x\sqrt{A_{11}} + y\sqrt{A_{22}} + \dots + w\sqrt{A_{nn}};$$

or, ce déterminant s'annule quand on donne à $x, y, \dots$ les valeurs $a_{i1}, a_{i2}, \dots$, car on peut remplacer 0 par a_{ii}, le multiplicateur Δ de cet élément étant nul, et l'on a alors un déterminant dont deux lignes parallèles sont identiques; ainsi, l'hypothèse $\Delta = 0$ entraîne la conséquence

$$a_{i1}\sqrt{A_{11}} + a_{i2}\sqrt{A_{22}} + \dots + a_{in}\sqrt{A_{nn}} = 0;$$

donc, etc.

Si l'on applique ce résultat au déterminant qui donne l'expression de la quantité $288\,V^2$, avec

$$a_{i1} = a_{i2} = \dots = 1, \qquad a_{i5} = 0,$$

on obtient le fait signalé par Sylvester.

Mais l'étude du quotient de N par V^2, quotient donné par Sylvester sous forme développée, reste encore à faire.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

Épreuve écrite. — 1° *Trouver une courbe plane* C *telle que, si la tangente et la normale en un quelconque* M *de*

ses points rencontrent OX *en* T *et* N, *le segment* TN *soit dirigé dans le sens de* OX *et ait une longueur donnée* $2a$. (*On pourrait exprimer l'ordonnée* y *de* M *en fonction de* a *et de l'angle* φ *formé par la tangente en* M *avec* OX, *puis en déduire* x.)

2° *Trajectoires orthogonales des courbes* C.

3° *Déterminer et construire celle des courbes* C *qui passe au point* O *et qu'on désignera par* C_0.

4° *Calculer l'aire totale de la surface engendrée par la révolution de* C_0 *autour de* OX.

5° *On peut trouver sur* C_0 *une infinité de couples de points* M, M_1, *tels que les tangentes en ces deux points soient également inclinées sur la bissectrice de* XOY : *lieu du milieu du vecteur* MM_1.

Solution.

1° $y = a \sin 2\varphi, \qquad x = a(\operatorname{Log} \sin^2 \varphi + \cos 2\varphi + h).$

2° MT est normale, MN tangente à la trajectoire cherchée.

3° $h = 1$: rebroussement pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

4° $$\Omega = \frac{8}{3}\pi a^2(2\sqrt{2} - 1).$$

5° $$\varphi + \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \xi = a\left(\operatorname{Log}\frac{\sin 2\varphi}{2} + 1\right), \quad \eta = a \sin 2\varphi.$$

Épreuve pratique. — 1° *Calculer, avec quatre décimales, la racine positive de l'équation*

$$x^3 - 3x - 1 = 0 \qquad (0,3222\ldots).$$

2° *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = x^2 + \cos 2x.$$

(Juin 1908.)

Grenoble.

Épreuve écrite. — 1° *On a un cube dont le côté a* 2^{cm}, *dont le centre est à l'origine des axes de coordonnées, les arêtes étant respectivement parallèles à ces axes.*

En désignant par r la distance d'un point M *dont les coordonnées sont a, b, c à un élément dv du volume du cube, on suppose que cet élément exerce sur* M *une attraction d'intensité $r\,dv$ dirigée suivant la droite qui va de* M *à l'élément dv. Déterminer la résultante de toutes ces attractions de masse égale à* 1.

2° *Un point* M *non pesant est soumis à une attraction dirigée suivant* MO *et d'intensité égale à* 2OM (*l'unité de longueur étant le centimètre*). *Le point est abandonné sans vitesse initiale dans la positive* M_0 *dont les coordonnées sont $x_0 = 10$, $y_0 = 15$, $z_0 = 20$. Au bout de combien de temps le mobile viendra-t-il heurter le cube? Quelles sont les coordonnées du point où aura lieu le choc?*

3° *On suppose qu'en heurtant le cube, le mobile est renvoyé conformément aux lois de la réflexion et sans perdre de sa vitesse. Déterminer les projections de la vitesse du mobile immédiatement après le choc.*

4° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + xy = 2x^2 - x - 1 - \frac{6}{x^2}.$$

Déterminer, en particulier, les courbes intégrales qui passent respectivement par les points : 1° $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$; 2° $x = 2$, $y = 1$.

Indiquer la forme générale des diverses courbes intégrales lorsque la constante d'intégration varie.

Épreuve pratique. — 1° *On donne la courbe représentée en coordonnées polaires par*

$$\rho = \sin 2\theta.$$

Construire cette courbe. Degré de cette courbe. Aire d'une de ses boucles.

2° *L'axe polaire étant* Ox, *calculer l'intégrale curviligne*

$$\int (2x - y + 1)\,dx + (4y - 3x + x^2)\,dy,$$

prise le long de l'arc de la courbe précédente obtenu en faisant varier θ *de* 0 *à* $\frac{\pi}{2}$.

3° *Discuter l'équation*

$$\mathrm{L}\cos x = x - 3.$$

Calculer la racine positive à $\frac{1}{100}$ *près.*

(Juillet 1908.)

Lille.

Géométrie analytique et Analyse. — I. *Étant donnée une ellipse dont les axes ont pour longueurs* $2a$ *et* $2b$ $(n \geqq b)$, *trouver une courbe* (Γ) *telle que le milieu du segment intercepté sur une tangente quelconque à* (Γ) *par* (Γ) *et par le petit axe de l'ellipse décrive l'ellipse.*

L'une des courbes cherchées peut être représentée par les équations

$$x = 2a \sin\varphi,$$

$$y = b\left(\cos\varphi + \sin^2\varphi\, \mathrm{L}\tang\frac{\varphi}{2}\right),$$

où x *et* y *sont les coordonnées d'un point courant et* φ *un angle variable; la construire.*

II. *Indiquer la forme de la courbe plane représentée dans un système de coordonnées polaires par l'équation*

$$\rho^2 = a^2 \cos\omega,$$

ω *étant l'angle polaire et* ρ *le rayon vecteur d'un point de la courbe,* a *désignant une longueur donnée.*

Calculer l'aire de la portion du plan limitée par cette courbe.

Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par la sphère de rayon a *dont le centre est au pôle et par un cylindre droit qui a pour base la courbe donnée.*

Mécanique. — I. *Étude cinématique du mouvement d'un solide autour d'un point fixe.*

II. *Un point matériel* M *de poids* p *est lancé avec une vitesse initiale* V_0 *sur un plan horizontal et décrit ainsi une droite* D *de ce plan. On demande de déterminer le*

temps que ce point mettra à s'arrêter, sachant qu'il est soumis, à cause du frottement et de la résistance de l'air, à une force retardatrice

$$F = a + bV^2. \tag{1}$$

Pour les calculs numériques, on supposera que la force F *est donnée en grammes par la formule* (1), *quand la vitesse* V *est évaluée en mètres par seconde, et l'on prendra*

$$V_0 = 10^m \text{ à la seconde},$$

$$p = 5^g, \qquad a = 0,1, \qquad b = 0,005.$$

(Juillet 1908.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — I. *Exposer la méthode qui permet d'intégrer l'équation différentielle linéaire*

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 y$$
$$= P(x) + A e^{\alpha x} + B e^{\beta x} + \ldots + L e^{\lambda x},$$

où $P(x)$ *est un polynome en* x, *et les quantités* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$, A, B, ..., L, α, β, ..., λ *des constantes.*

II. *Étudier le mouvement d'un point qui est assujetti à rester sur une sphère de rayon* l *et n'est soumis à aucune force extérieure. (On prendra le centre de la sphère comme origine des axes et l'on cherchera à déterminer le temps* t *en fonction de la coordonnée* z.)

III. *Même problème que ci-dessus dans l'hypothèse où le point mobile sur la sphère est un point de masse* 1 *soumis à l'action de la pesanteur. Démontrer que le temps* t *sera alors donné en fonction de* z *par l'égalité*

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{l\,dz}{\pm\sqrt{(2gz + h)(l^2 - z^2) - c^2}},$$

g *étant l'accélération de la pesanteur,* h *et* c *des constantes.*

Développer la fonction t de z par rapport aux puissances entières croissantes de z.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Podaire de l'hyperbole*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

par rapport à son centre. Quadrature de cette podaire. Cas de $b = a$.

(Juillet 1908.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer l'équation différentielle $yy'' + y'^2 + 4 = 0$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable x, ayant pour dérivée première y' et pour dérivée seconde y''. En considérant x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point, quelles sont les courbes représentatives de l'intégrale générale?*

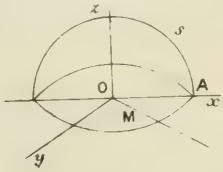
II. *Intégrer les deux équations différentielles simultanées*

$$\frac{dy}{dx} = z + 3y, \qquad \frac{dz}{dx} = z - ay + e^{4x},$$

dans lesquelles a désigne une constante, y et z des fonctions inconnues de x.

On discutera la nature des intégrales suivant les diverses valeurs attribuées à la constante a. On examinera en particulier le cas où a possède l'une des valeurs $a = -3$, $a = 1$, $a = 2$.

III. *Soient trois axes rectangulaires $Oxyz$ et une demi-*



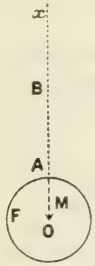
sphère S de centre O, de rayon a, située au-dessus du

plan xOy *et rencontrant l'axe* Ox *au point* A. *Dans le plan* xOy *on considère la courbe ayant pour équations en coordonnées polaires* $OM = r$, $\widehat{xOM} = \theta$, $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$. *Tracer cette courbe et calculer l'aire de la portion de surface sphérique* S *qui se projette à l'intérieur de la courbe.*

Épreuve pratique. — *Calculer les intégrales*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

II. *La Terre étant regardée comme une sphère homogène fixe de rayon* R, *on suppose qu'un puits rectiligne soit creusé depuis un point* A *de la surface jusqu'au*



centre O. *A l'instant* $t = 0$, *on lance du point* A *vers le point* O *un point pesant de masse* m *avec une vitesse initiale dont la valeur absolue est* V_0. *Étudier le mouvement du point, sachant que l'attraction de la Terre, sur un point* M *placé à l'intérieur, est une force* F *dirigée vers le centre* O *et proportionnelle à la distance* OM; *à la surface, en* A, *cette force se réduit au poids* mg (*on néglige la résistance de l'air*). *Calculer le temps* T *que met le mobile à arriver au centre* O, *et la vitesse* V *avec laquelle il y arrive; on fera les calculs numériques dans les deux hypothèses suivantes :* 1° *on supposera d'abord* $V_0 = 0$; 2° *on supposera ensuite que* V_0 *est la vitesse acquise au point* A *par le point pesant abandonné sans vitesse au point* B, *de la verticale* OA, *situé à une distance* $OB = 2R$ *du centre; on admettra que l'attraction de la Terre sur*

un point extérieur varie en raison inverse du carré de la distance du point au centre O.

NOTA. — *On sait qu'en prenant pour unité de temps la seconde et pour unité de longueur le mètre, on a*

$$g = 9,8, \qquad 2\pi R = 40000000.$$

(Juillet 1907.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la droite variable définie par l'équation*

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \lambda, \tag{1}$$

où α *désigne un paramètre variable et* λ *une fonction de* α. *Soient* M *le point où elle touche son enveloppe,* P *le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine* O *sur la droite.*

1° *Calculer les coordonnées des points* M, P *et les expressions des distances* OM, OP, MP.

2° *Montrer que, si la distance* MP *est constante,* λ *est une fonction linéaire de* α,

$$\lambda = a\alpha + c$$

(*a et c étant des constantes*).

3° *Étudier l'enveloppe des droites satisfaisant à cette condition. (Forme de la courbe, expressions de l'élément d'arc et du rayon de courbure, coordonnées du centre de courbure, développée.)*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^{2a} x^3 \sqrt{2ax - x^2}\, dx.$$

(Juin 1908.)

PREMIER EXAMEN DU DIPLOME D'INGÉNIEUR ÉLECTRICIEN.

Lille.

MATHÉMATIQUES. — I. *Construire la courbe* (C) *qui a pour*

équation en coordonnées polaires

$$\rho = a\sqrt{\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}},$$

où a désigne une longueur donnée positive.

Former l'équation de cette courbe en coordonnées cartésiennes rectangulaires.

Exprimer les coordonnées (x, y) *d'un point de la courbe en fonctions rationnelles d'un paramètre.*

II. *Soient* OA *l'arc de courbe situé au-dessus de* OX *et à droite de* OY, T *le point de rencontre de* OX *avec la tangente en* A. *Calculer l'aire de la portion du plan limitée par l'arc* OA, *la tangente* AT *et l'axe* OX.

III. *Construire le cercle de courbure au point* A.

IV. *Former l'équation des trajectoires orthogonales des courbes* C, *lorsque a varie. Construire l'une de ces courbes.*

V. *Calculer pour* $a = 1$ *les coordonnées* x *et* y *du point le plus à droite sur la courbe* C.

Mécanique. — *Même composition que pour le Certificat de Mathématiques générales.*

(Juillet 1908.)

TROISIÈME EXAMEN DU DIPLOME D'INGÉNIEUR ÉLECTRICIEN.

Lille.

Épreuve écrite. — I. *Théorie des caractéristiques mécaniques. Relations dynamiques entre un moteur et les outils qu'il actionne.*

II. *Transmissions par bielle et manivelle.*

Épreuve pratique. — *On considère un régulateur de Watt, avec suspension sur l'axe, ayant les caractéristiques*

suivantes :

Poids des boules.....		$P = 15^{kg}$
» du manchon.....		$Q = 3^{kg}$
Longueur et poids des bras...	$a = 0^{m},65$,	$p = 3^{kg}$
» » bielles.	$b = 0^{m},35$,	$q = 1^{kg},5$

Valeurs limites de l'angle d'inclinaison α des bras :

$$\alpha_0 = 21^\circ, \qquad \alpha_1 = 33^\circ.$$

Résistance opposée au manchon par les organes de réglage : $F = 3^{kg}$.

Vitesse de la machine : 45 tours par minute.

1° *Construire le graphique qui figure la zone de stabilité du régulateur.*

2° *Calculer la sensibilité et le degré d'isochronisme.*

(Juillet 1908.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2097.

(1908, p. 384.)

Étant donnés, dans un plan, un cercle et un point H, *on considère tous les triangles qui ont pour orthocentre le point* H *et dont un côté est un diamètre* MM′ *du cercle :*

1° *Trouver le lieu du troisième sommet* P.

2° *Trouver l'enveloppe* (E) *des droites* PM, PM′. *Les points de contact de ces droites avec l'enveloppe étant* N *et* N′, *faire voir que la droite* NN′ *passe en* H *et est parallèle à* MM′.

3° *Le cercle circonscrit au triangle* PMM′ *passe par deux points fixes ; il en est de même du cercle des neuf points. Les pieds des hauteurs du triangle* PMM′ *étant* K

sur MM′, I *sur* PM, I′ *sur* PM′, *la droite* H′ *passe par un point fixe.*

4° *La conique de foyer* H *inscrite au triangle* PMM′ *est tangente à deux droites fixes; son petit axe a une longueur constante.*

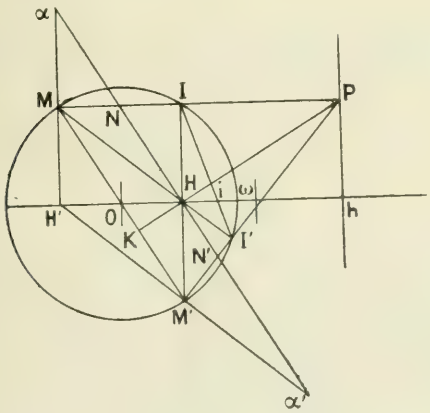
On désignera par a le rayon du cercle donné, par c la distance du point H *au centre* O *du cercle.*

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. G. Pélissier.

1° Les points I et I′ sont sur le cercle O ; la figure montre alors immédiatement que les points H et P sont conjugués



par rapport au cercle et que le lieu de P est la polaire de H, par rapport au cercle O.

2° L'enveloppe des droites PM, PM′ est une conique ayant pour foyer H et pour cercle principal le cercle O. Soit H′ le symétrique de H par rapport au point O : la parallèle à MM′ menée par H rencontre H′M et H′M′ en des points α et α′ tels que

$$H'M = M\alpha, \qquad H'M' = M'\alpha'.$$

Les points N et N′ où la droite $\alpha\alpha'$ rencontre respectivement PM et PM′ sont donc les points de contact de ces droites avec leur enveloppe (E).

3° L'angle $\widehat{MH'M'}$ étant égal à l'angle $\widehat{MHM'}$, le quadrilatère H′MPM′ est inscriptible et le cercle PMM′ passe par le point fixe H′. Il passe aussi par le point h, pied de la polaire de H, puisque l'angle $\widehat{PhH'}$ est droit; on a

$$OH.Oh = a^2.$$

Le cercle des neuf points qui est l'homothétique par rapport à H et dans le rapport $\frac{1}{2}$ du cercle PMM′ passe par le point O et le milieu ω de Hh : on a d'ailleurs

$$O\omega = \frac{1}{2}\,\frac{a^2+c^2}{c}.$$

Soit i le point de rencontre de H′ et de OH ; ce point a même puissance par rapport au cercle O et au cercle des neuf points du triangle PMM′ qui passe en I et I′. On a donc

$$\overline{Oi}^2 - a^2 = \overline{iO}\,.\,\overline{i\omega} = \overline{iO}\left(\overline{O\omega} + \overline{iO}\right),$$

d'où

$$Oi = \frac{a^2}{O\omega} = \frac{2a^2c}{a^2+c^2}.$$

Le point i est donc fixe ; c'est le pied de la polaire de ω par rapport au cercle O.

4° La conique de foyer H inscrite au triangle PMM′ a pour cercle principal le cercle des neuf points de ce triangle : elle admet deux tangentes fixes parallèles qui sont les perpendiculaires en O et ω à OH ; le carré du petit axe β de cette conique est égal au produit des distances de H à ces deux tangentes, c'est-à-dire

$$OH.H\omega = \frac{a^2-c^2}{2};$$

il est donc constant.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist, C. Faraggi, P. Favre, P. Sondat, M. Têtu, A. Vacquant.

2101.

(1908, p. 478.)

La quintique gauche qui est l'intersection partielle d'une quadrique et d'une surface du troisième ordre et ayant une droite commune dépend de 20 *paramètres.* (G. F.)

SOLUTION

Par M. Jan de Mezéas.

Soient C la quintique gauche considérée, S_2 et S_3 les surfaces, respectivement du deuxième et du troisième ordre, dont elle est l'intersection partielle, D la droite qui complète cette intersection. Désignons par λ et μ les paramètres dont dépendent d'une manière univoque les génératrices de S_2, λ étant relatif aux génératrices du même système que D, μ aux génératrices de l'autre système. Cherchons la forme de la relation

$$f(\lambda, \mu) = 0$$

qui relie les paramètres de deux génératrices de S_2 se coupant en un point de C.

Toutes les génératrices du même système que D rencontrent S_3 en trois points dont aucun n'appartient à D. Ces trois points appartiennent donc à C.

Toutes les génératrices du système opposé à D rencontrent S_3 en trois points, dont l'un appartient à D et les deux autres à C.

Il résulte de là que la relation (1) est telle qu'à une valeur de λ correspondent trois valeurs de μ, et à une valeur de μ, deux valeurs de λ. Cette relation est donc de la forme

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

A, B, C étant des polynomes du troisième degré en μ. Cette relation contient donc $3.4 - 1 = 11$ paramètres.

Pour définir la quintique C, il faut se donner la quadrique S_2, qui est évidemment unique pour une quintique donnée, et la relation (1), en tout $9 + 11 = 20$ paramètres.

2102.

(1908, p. 479.)

On considère un limaçon de Pascal et les cercles bitangents n'ayant pas leurs centres sur l'axe de symétrie :

1° *La corde de contact passe par un point fixe* P.

2° *Enveloppe de la polaire de ce point par rapport à un cercle bitangent.*

3° *Lieu du pôle de la corde de contact par rapport à un cercle bitangent.*

4° *Lieu du milieu de cette corde.*

5° *Lieu du conjugué harmonique de* P *par rapport aux points de contact du cercle avec le limaçon.*

(M. Têtu.)

SOLUTION

Par M. Clapier.

Soient O et A les foyers d'une conique situés à la distance d; désignons par R le grand axe. Si nous faisons une inversion en prenant A pour pôle et $R^2 - d^2$ pour puissance d'inversion, la conique devient un limaçon de Pascal ayant A pour point double. Aux cercles bitangents ayant leur centre sur l'axe normal à l'axe de symétrie OA, correspondent des cercles bitangents au limaçon ayant leurs centres sur la circonférence (O) de centre O et de rayon d; ces derniers cercles seront orthogonaux à la circonférence (P) inverse de l'axe de la conique, dont le rayon est PA ; son centre P est à la distance

$$OP = \frac{R^2}{d}.$$

Inversement, tout limaçon de Pascal peut être défini en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = 2d\cos\theta \pm R;$$

il est l'inverse d'une conique admettant le point double A pour foyer et pour excentricité $\frac{d}{R}$. Il peut donc être défini

comme enveloppe de cercles bitangents (K) dont le centre décrit une circonférence donnée (O) et qui sont orthogonaux à une circonférence fixe (P) tangente à la première au point A.

1° La corde des contacts MM′ de l'un de ces cercles bitangents passe par le point fixe P, foyer simple du limaçon.

4° Le milieu μ de MM′ appartient à la podaire du centre P par rapport à la circonférence (O); il décrit donc un limaçon.

5° Soit μ' le conjugué harmonique de P par rapport à M et M′; nous avons

$$\frac{2}{P\mu'} = \frac{1}{PM} + \frac{1}{PM'} = \frac{2P\mu}{\overline{PA}^2};$$

donc le lieu de ce point μ' est l'inverse du limaçon précédent, c'est une conique de foyer P tangente en A aux circonférences données.

2° La polaire au point P par rapport au cercle bitangent n'est autre que l'axe radical de ce cercle avec la circonférence (P); elle passe par μ' et touche en ce point la conique précédemment trouvée; celle-ci est donc l'enveloppe demandée.

3° Enfin le pôle I de la corde des contacts est tel que le cercle circonscrit au triangle IMM′ est orthogonal aux circonférences (O) et (P); le centre de ce cercle est donc sur la tangente commune AΔ à ces circonférences. Il en résulte que l'angle $\widehat{KAI}$ est droit et que le lieu du point I est l'homothétique double par rapport au point A d'une courbe qui est la podaire d'une parabole de foyer O et tangente à O; c'est une cissoïde admettant A pour point de rebroussement.

Autres solutions par MM. E.-N. Barisien, R. Bouvaist, G. Pelissier, V. Retali.

QUESTIONS.

2126. Soient a, b, c, d les points de Frégier situés sur les normales PA, PB, PC, PD, menées du point P à une conique (C).

L'hyperbole équilatère passant par a, b, c, d rencontre la conique (C) en quatre points A′, B′, C′, D′, où les normales à la conique (C) sont concourantes en un point P′. Les points de Frégier a', b', c', d' situés sur les normales P′A′, P′B′, P′C′, P′D′ sont sur l'hyperbole d'Apollonius relative à P.

GEORGES CUNY.

2127. D'un point P on mène les quatre normales à une conique : soient α, β, γ, δ les centres de courbure situés sur ces quatre normales. De chacun des points α, β, γ, δ on peut mener deux autres normales à la conique.

Démontrer que ces huit droites sont tangentes à une même conique. GEORGES CUNY.

2128. D'un point P on mène les trois normales à une parabole : soient α, β, γ les centres de courbure situés sur ces trois normales. De chacun des points α, β, γ on peut mener une autre normale à la parabole. Démontrer que ces trois droites concourent. GEORGES CUNY.

2129. Un point P décrit une normale à une parabole : de ce point on peut mener deux autres normales à la parabole. Démontrer que la droite qui joint les centres de courbure situés sur ces deux normales enveloppe une parabole quand le point P décrit la normale donnée. GEORGES CUNY.

[Q3a]

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION [1];

PAR M. HADAMARD.

1. Nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, à considérer des surfaces (ou, incidemment, des lignes). Des considérations analogues, mais plus compliquées, peuvent d'ailleurs se développer pour des volumes ou des figures à un nombre quelconque de dimensions.

Il pourra arriver que les surfaces ou lignes ainsi envisagées présentent des lignes doubles en lesquelles se croisent plusieurs nappes, des points doubles en lesquels se croisent plusieurs branches. Mais, lorsqu'il en sera ainsi, nous admettrons toujours que les parties qui se croisent sont en réalité parfaitement distinctes. Si, par exemple, une ligne a la forme d'un 8, tout se passera dans nos raisonnements comme si cette ligne était en réalité une corde (*fig.* 1) dont les deux brins passent *au-dessus* l'un de l'autre et non l'un à travers l'autre. Quoique ne pouvant pas être figurée de la même façon, la convention sera la même pour deux nappes de surface se traversant : il sera bien entendu qu'un point mobile sur la surface ne pourra pas passer d'une nappe à l'autre en un point de la ligne de croisement.

[1] Les notions d'*ordre de connexion* et de *genre* ont été portées, cette année, au programme de l'Agrégation des sciences mathématiques. Il nous a paru utile de présenter aux lecteurs et en particulier aux candidats les résultats fondamentaux de cette théorie.

Tout point de cette dernière ligne représente, en réalité, *deux* points différents de la surface.

Fig. 1.

2. La *Géométrie de situation* (ou encore *Analysis situs*) est une branche de la Géométrie dans laquelle on ne regarde pas deux figures comme différentes lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue, sans déchirure ni soudure.

Ainsi, nous regarderons comme entièrement équivalentes l'une à l'autre, dans tout ce qui va suivre, l'aire d'un cercle et celle de n'importe quelle autre portion de plan limitée par une ligne fermée unique (et sans point double) : par exemple, celle d'un polygone convexe quelconque. Car toutes ces aires peuvent être ramenées les unes aux autres par déformation continue.

De même, l'aire d'une sphère ne différera pas, à notre point de vue, de celle d'un ellipsoïde ou de celle d'un polyèdre convexe quelconque.

Par contre, il n'est pas possible de passer continûment (sans déchirure ou soudure) de l'aire d'un cercle à l'aire d'une couronne circulaire : ces deux figures sont différentes au point de vue de la Géométrie de situation.

De même, on ne peut pas passer continûment de

l'aire d'une sphère à celle d'un tore : il est clair qu'une déformation continue ne peut pas (toujours à moins de soudure) faire disparaître le *trou* que présente cette dernière surface. La sphère et le tore sont donc des êtres différents pour la Géométrie de situation.

Deux figures équivalentes entre elles au sens qui vient d'être expliqué sont encore dites *homéomorphes*. On dit aussi qu'elles ont *la même connexion* ([1]).

3. Une figure F étant homéomorphe à une autre F′, faisons subir à F une des déformations continues ([2]) qui l'amènent en F′. Chaque point M de F est ainsi transformé en un point déterminé M′ de F′. Nous avons dès lors réalisé entre les deux points M et M′ pris respectivement dans les deux figures une correspondance qui jouit des propriétés suivantes :

1° Elle est *biunivoque*, c'est-à-dire qu'à chaque position du point M correspond une position du point M′ et qu'inversement, à chaque position du point M′ correspond une position, et une seule, du point M;

2° Elle est *continue*, c'est-à-dire que, lorsque le point M varie continûment, il en est de même du point M′, et inversement.

Cette dernière propriété est une conséquence de ce que notre déformation a eu lieu sans déchirure ni soudure.

([1]) On devra tenir compte de la convention faite plus haut relative aux croisements. Ainsi, une courbe en 8 est équivalente, sous notre point de vue, à une circonférence : car la corde représentée figure 1 peut évidemment être ramenée par continuité à la forme circulaire.

([2]) Il existe toujours une infinité de telles déformations du moment qu'il en existe une.

Réciproquement, *si, entre deux figures* F, F′ *existe une correspondance point par point possédant les deux propriétés précédentes, ces deux figures sont homéomorphes.*

Soient, en effet, M, M′ deux points correspondants quelconques : considérons un point mobile m qui, parti de M à l'instant $t = 0$, arrive en M′ à l'instant $t = 1$; et, à chaque couple de points homologues M, M′ faisons correspondre un tel mouvement. Nous pourrons évidemment choisir ces mouvements de manière qu'à chaque instant déterminé t le point m varie continûment avec M et M′. Il suffira de supposer que les mouvements en question sont tous rectilignes et uniformes : le point m s'obtiendra alors en joignant MM′ et portant sur cette droite un segment $\overline{Mm} = t.\overline{MM'}$.

Dès lors, la variation de la figure f, lieu du point m pour t donné, constitue une déformation continue de F en F′, sans déchirure ni soudure (avec ou sans les croisements dont il a été question au n° 1).

Donc l'existence d'une correspondance biunivoque et continue entre les points des deux figures est une *condition nécessaire et suffisante d'homéomorphie.*

Elle constitue une *nouvelle définition de l'homéomorphie*, entièrement équivalente à celle dont nous sommes partis.

4. Cette nouvelle définition va nous permettre de donner à la notion précédente une extension importante.

Considérons un être mathématique quelconque (ligne droite ou courbe, fonction, etc.) susceptible de varier continûment. Pour fixer les idées, nous allons nous adresser à une droite mobile dans l'espace ; mais il est bien entendu que tout ce que nous allons dire

subsiste, quelle que soit la nature de l'objet variable.

Supposons qu'une droite variable de l'espace ordinaire dépende (continûment) de p paramètres ($p = 1, 2, 3, 4$). Nous dirons qu'elle décrit une *variété à p dimensions*. Chaque position déterminée de la droite sera dite un *point* déterminé de la variété en question [1].

Il est clair que, dans le cas de $p = 2$, par exemple, on ne saurait établir de relation d'homéomorphie entre une variété de l'espèce précédente et une surface au sens du n° 2.

Mais une telle relation peut, au contraire, parfaitement exister au sens du numéro précédent.

S étant une surface convenablement choisie, il pourra fort bien arriver qu'à chaque *point* de notre variété — autrement dit à chacune des positions que nous admettons pour notre droite variable — corresponde un point (au sens ordinaire du mot) de S, et que cette correspondance soit biunivoque et continue.

S'il en est ainsi, on dira encore que notre variété et la surface S sont *homéomorphes*.

5. Nous emprunterons à M. Klein un exemple remarquable d'une telle relation.

Considérons deux courbes fermées C, C', lesquelles seront soit gauches, soit situées dans des plans différents. Joignons un point quelconque p de C à un point quelconque p' de C' par une droite D. Une telle droite dépend évidemment de deux paramètres : l'un, α, qui fixe la position du point p sur C; l'autre, β, qui fixe la

---

[1] On ne doit évidemment pas confondre le *point* ainsi défini avec les points ordinaires de la droite, lesquels sont en nombre infini pour une position déterminée de celle-ci.

position de p' sur C'. Elle décrit donc une variété à deux dimensions.

Nous allons voir que *cette variété est homéomorphe à un tore.*

Nous pouvons, en effet, supposer que chacun des paramètres α et β varie de 0 à 2π lorsque le point correspondant décrit entièrement sa courbe fermée (par exemple, si C est un cercle, α pourra être l'angle du rayon qui aboutit en p avec un rayon fixe).

Or, sur un tore donné, la position d'un point est déterminée par deux angles α, β (l'un qui détermine la position d'un cercle méridien, l'autre qui détermine la position du point sur ce méridien) variant de 0 à 2π (la valeur 2π donnant d'ailleurs le même résultat que la valeur 0).

Dès lors, si, à chaque position de la droite D précédemment considérée, nous faisons correspondre le point du tore qui est défini par les mêmes valeurs de α et de β, il est clair que cette correspondance sera parfaitement univoque et continue. Il y a donc homéomorphie.

Cette homéomorphie peut d'ailleurs être traduite en d'autres qui aient lieu au sens du n° 2.

Soit O un point fixe. Abaissons de ce point la perpendiculaire OH sur la droite D. Il est évident que le point H varie continûment avec la position de D.

Donc, lorsque celle-ci décrira la variété précédemment définie, le point H décrira une surface S homéomorphe au tore [1].

---

[1] Il pourra exister des points H qui correspondent à deux positions de la droite D (et qui formeront en général des lignes doubles de S); mais, conformément à la convention du n° 1, un tel point devra être considéré comme l'ensemble de deux points différents de S.

La construction précédente peut d'ailleurs manifestement être variée d'une infinité de façons : on pourrait prendre pour H le pied de la perpendiculaire commune entre D et une droite fixe, ou le milieu de pp' ; etc.

6. Nous nommerons *élément de surface,* ou *élément à deux dimensions,* l'aire d'un cercle ou toute autre variété à deux dimensions homéomorphe à celle-là (en particulier, comme nous l'avons vu, toute portion de plan limitée par une coube fermée unique et sans point double).

De même, nous appellerons *élément de ligne* un segment de droite ou toute autre figure qui lui soit homéomorphe, c'est-à-dire tout arc continu, mais non fermé de ligne droite ou courbe.

7. **Convention fondamentale.** — Nous nous bornerons dans ce qui va suivre aux surfaces (ou lignes) qui vérifient la condition suivante :

Quel que soit le point M pris sur la figure considérée, la partie de celle-ci qui est située au voisinage de ce point a la forme d'un élément.

M peut d'ailleurs être à l'intérieur de cet élément ou (dans le cas d'une surface) sur son contour. Ce second cas se présente si M fait partie du contour ou *bord* ou encore de la *frontière* [1] de la surface considérée S elle-même.

De même, si la figure considérée est une ligne, la partie de celle-ci qui avoisine un de ses points M est un élément de ligne comprenant M ou ayant M comme

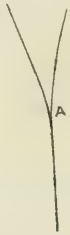
---

[1] Le mot *frontière*, synonyme des deux précédents dans le cas des surfaces, présente sur eux l'avantage de pouvoir s'employer quel que soit le nombre des dimensions.

extrémité, auquel cas M est aussi une extrémité de la ligne considérée elle-même.

Par exemple, nous exclurons de nos considérations une ligne ayant la forme représentée figure 2, car

Fig. 2.



l'hypothèse fondamentale qui vient d'être faite ne serait pas vérifiée au point A de cette figure.

Pour la même raison, les surfaces que nous considérerons ne pourront pas avoir la forme d'un cylindre ayant pour base la ligne en question.

8. Notre surface peut d'ailleurs présenter des formes très variées et des singularités relativement compliquées sans contrevenir à la condition que nous venons de lui imposer.

Rien ne l'empêche d'admettre des lignes doubles (du moment que la convention du n° 1 est respectée).

Elle peut, d'autre part, présenter des points coniques. La surface latérale ou la surface totale d'un cône, la surface totale ou partielle des polyèdres usuels [1], font partie de celles que nous pourrons avoir à étudier.

---

[1] Notre condition fondamentale ne serait pas vérifiée dans le cas d'une pyramide ayant pour base l'espace annulaire compris entre deux polygones plans intérieurs l'un à l'autre, puisqu'au sommet S

Considérons encore, avec Riemann, un point variable, que nous prendrons d'abord sur le plan des xy, et dont les coordonnées polaires seront ρ, ω; ρ variant de 0 à 1, *et* ω *de* 0 *à* 4π.

Ce point est intérieur au cercle de rayon 1 qui a pour centre l'origine et prend toutes les positions possibles dans ce cercle. Mais, de plus, chacune de ces positions (le centre excepté) est occupée deux fois. A tout point M du cercle en question correspondent une seule valeur de ρ, mais deux valeurs de ω, l'une comprise entre 0 et 2π, l'autre entre 2π et 4π.

Nous considérerons ces deux systèmes de valeurs de ρ, ω comme définissant, en réalité, *deux* points distincts M_1, M_2, et, pour les distinguer l'un de l'autre, nous placerons le premier M_1 (celui qui correspond à $0 < \omega < 2\pi$) un peu au-dessus du plan des xy, l'autre M_2 ($2\pi < \omega < 4\pi$) un peu au-dessous de ce plan. Toutefois, la distance de ces points au plan des xy s'annulera pour $\omega = 2\pi$, de manière que l'un d'eux varie continûment (en passant du dessus au dessous du plan) lorsque ω traverse cette valeur 2π. Il en sera de même pour $\omega = 0$ et $\omega = 4\pi$, et, de plus, le point (ρ, 4π) ne sera pas regardé comme distinct du point (ρ, 0), de manière qu'il y aura aussi passage continu du dessous au dessus du plan pour $\omega = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 4\pi \end{smallmatrix} \right\}$. Le bord unique de l'aire S_1 correspondra donc exclusivement à $\rho = 1$.

On satisfera, par exemple, à toutes ces conditions en prenant pour cote d'un point de S_1 la quantité repré-

---

de cette pyramide existeraient deux angles polyèdres différents, à moins d'opérer comme au n° 1 et de considérer S comme représentant deux points distincts, sommets respectifs des angles polyèdres en question.

sentée en grandeur et signe par l'expression

$$(1) \qquad \varepsilon\rho \sin\frac{\omega}{2},$$

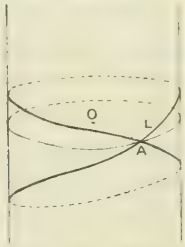
ε étant une quantité positive très petite, ou encore, ce qui revient au même à notre point de vue, par l'expression

$$(1') \qquad \varepsilon\sqrt{\rho} \sin\frac{\omega}{2},$$

dans laquelle le radical est pris positivement.

On aura ainsi une nappe de surface conique dans le cas de l'expression (1), une surface analogue, mais à génératrices curvilignes, dans le cas de l'expression (1'), ayant pour sommet l'origine O et pour base une courbe L telle que celle qui est représentée figure 3,

Fig. 3.



ayant par conséquent pour ligne double le segment de droite OA (dans lequel A a pour coordonnées 1, 0, 0).

Si compliquée qu'elle soit en apparence, une telle aire S_1 est un élément de surface. *Elle correspond, en effet, d'une manière parfaitement biunivoque et continue à celle qui est décrite par le point m de coordonnées polaires* $\sqrt{\rho}$, $\frac{\omega}{2}$ (ρ et ω variant dans les mêmes conditions que tout à l'heure), *laquelle n'est*

autre que le cercle de rayon 1 *dont nous sommes partis.*

Si l'on considère le point M comme représentant, à la manière habituelle, une imaginaire Z et le point m comme représentant une imaginaire z, celle-ci est liée à la première par la relation $z = \sqrt{Z}$.

L'expression (1') représente, au facteur ε près, le coefficient de i dans la valeur de z.

9. Plus généralement, supposons la variable imaginaire z liée à la variable imaginaire Z par la relation

$$(2) \qquad z = \sqrt{R(Z)} = \sqrt{(Z - a_1)(Z - a_2)\ldots(Z - a_n)},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes distinctes [1].

Nous considérerons les valeurs de Z comprises à l'intérieur d'un certain cercle C, lequel comprendra tous les points $a_1, \ldots, a_n$.

A chacune d'elles correspondront deux valeurs de z. Cette dernière quantité, lorsque Z décrit un contour fermé, revient ou non, comme on sait, à sa valeur primitive suivant que ce contour contient à son intérieur un nombre pair ou un nombre impair de points a.

Si, en particulier, on décrit le cercle C, il y aura permutation ou non suivant que n sera impair ou pair.

M étant le point représentatif de Z sur le plan des variables complexes, portons, perpendiculairement à ce plan, à partir de M, une cote égale (en grandeur et signe) à $\varepsilon z''$, ε étant encore une quantité positive très

---

[1] Si a_2, par exemple, était égal à a_1, on pourrait faire sortir du radical le facteur $Z - a_1$. Les propriétés de la surface déduite de la relation (2) par les moyens indiqués dans le texte ne seraient pas distinctes, à notre point de vue, de celles auxquelles on arriverait en supprimant le facteur en question : il y aurait homéomorphie entre les deux surfaces obtenues.

petite et z'' le coefficient de i dans la valeur

$$z = z' + iz''$$

de z.

Nous obtenons ainsi une *surface de Riemann* (¹) S, laquelle a, comme on le voit, deux points projetés suivant un point quelconque M intérieur à C.

Il est aisé de voir qu'une telle surface vérifie la condition que nous avons posée au n° 7.

Considérons, en effet, un petit cercle γ du plan des Z.

Si ce cercle γ ne contient aucun des points-racines a, les valeurs de z ne se permuteront pas dans l'intérieur de γ. Ce seront, dans le cercle γ, deux fonctions analytiques, entièrement distinctes, de Z. Seront dès lors projetés suivant γ deux éléments de surface faisant partie de S, l'un sur lequel la cote sera le coefficient de i dans z_1, l'autre (²) ayant pour cote le coefficient de i dans z_2.

Supposons, au contraire, que γ contienne à son intérieur le point a_1.

Alors la partie Σ de S, projetée suivant γ, aura la

(¹) La définition usuelle des surfaces de Riemann, telle qu'on est conduit à la donner dans la théorie des fonctions algébriques, est un peu différente de la précédente. Elle s'en distingue (*voir* PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 419) en ce que, moyennant une transformation par rayons vecteurs réciproques, on remplace le plan par une sphère et la surface que nous considérons dans le texte par une surface fermée.

La définition des surfaces de Riemann s'étend d'elle-même au cas où z est lié à Z par une relation algébrique quelconque.

(²) Il y aura croisement entre les deux éléments en question si γ renferme des points où z est réel. On aura encore, dans ce cas, à appliquer la convention du n° 1. La surface renferme donc une série de lignes le long desquelles les deux feuillets se croisent. Chacune de ces lignes de croisement est, en général, issue d'un des points $a_1, \ldots, a_n$ et terminée en un autre de ces points.

forme S_1 décrite au numéro précédent. On peut, en effet, écrire

$$\sqrt{R(Z)} = \sqrt{(Z - a_1) R_1(Z)}$$

et supposer qu'on ait pris d'une manière déterminée le signe du second radical (lequel ne s'annule pas pour $Z = a_1$). $R_1(Z)$ est d'ailleurs (si γ est très petit) sensiblement égal à une constante, et Σ_1 est homéomorphe à la surface qu'on obtient en remplaçant $R_1(Z)$ par l'unité, laquelle est visiblement égale à S_1.

10. Non seulement nous admettons que le voisinage d'un point quelconque de notre surface a la forme d'un élément; mais, d'une manière plus précise, nous admettrons que cette surface est divisible en un nombre fini de portions $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_F$ dont chacune a la forme d'un élément [1].

L'une quelconque de ces portions ou *faces*, Σ_1 par exemple, sera bornée, soit par les portions voisines, soit par le bord de la surface. Nous aurons donc, dans son contour, à distinguer plusieurs parties ou *arêtes*, le long de chacune desquelles (à moins qu'il ne s'agisse d'une arête du bord) Σ_1 sera contiguë à une seule et même face voisine [2], le nombre total des arêtes ainsi distinguées étant fini. Cela revient à dire que notre surface pourra être considérée comme une *surface polyédrale*, ne différant de la surface d'un polyèdre ordinaire (ou d'une portion de cette surface) qu'en ce que

---

[1] Cette hypothèse n'est pas, au fond, plus restrictive que la première. Mais nous ne nous arrêterons pas à démontrer qu'il en est ainsi.

[2] Par contre, rien ne nous empêchera de subdiviser au besoin une telle arête, faisant partie du bord ou le long de laquelle Σ_1 sera contiguë à une et une seule face voisine, en deux ou plusieurs parties considérées comme autant d'arêtes distinctes.

les faces et les arêtes seront, en général, courbes [1].

On peut bien aisément, par exemple, mettre sous forme d'un tel polyèdre la surface de Riemann définie au numéro précédent. Il suffira, en général, de mener les rayons qui passent par les points a_k. On décompose ainsi (dans le plan des Z) C en n secteurs qui donnent chacun deux faces de S.

11. Orientation d'une aire.— Un plan a, dans l'espace ordinaire, deux côtés ; et il en est de même, plus généralement, d'une petite portion de surface régulière quelconque.

On sait que la distinction entre ces deux côtés est équivalente à celle de la droite et de la gauche sur le plan ou la surface en question. Soient, en un point M de cette dernière, Mn, Mn' deux petits segments de lignes ayant pour tangente (s'ils sont courbes) les *demi-droites* Mt, Mt'; on pourra dire si la direction du second segment est à droite ou à gauche de celle du premier, dès qu'on aura spécifié le côté où l'observateur est censé se placer pour les regarder.

Soit un petit contour fermé (sans point double) tracé sur la surface autour de M. On peut encore remplacer le choix d'un côté de la surface ou la définition de la droite et de la gauche sur elle par l'indication, sur ce contour, du sens de parcours qu'on considérera comme *direct :* on sait, en effet, qu'on appelle ainsi le

---

[1] Toutefois, contrairement à ce qui se passe pour les polyèdres ordinaires (ou, du moins, pour les polyèdres convexes), il pourrait arriver : 1° qu'une face soit contiguë *à elle-même,* suivant une arête; 2° qu'elle soit contiguë à une même face voisine suivant deux arêtes *non consécutives.* Mais chacune de ces deux circonstances peut toujours être évitée en subdivisant, s'il y a lieu, les faces. Au reste, ni l'une ni l'autre ne compromettent les raisonnements qui vont suivre.

sens dans lequel il faut décrire le contour pour avoir l'aire intérieure à gauche.

Si l'on a choisi un côté de la surface ou défini la droite et la gauche au point M, ou indiqué, autour de ce point, un sens de parcours considéré comme direct, on dira que cette surface est *orientée* en M.

Il importe de remarquer que, sous l'une des deux dernières formes, cette définition s'étend aux *variétés* telles que nous les avons envisagées au n° 4.

12. **Surfaces (ou variétés) bilatères et unilatères.** — Un élément de notre surface étant orienté d'une manière arbitraire, on peut convenir d'orienter de même un élément voisin : convention dont le sens est clair si les deux éléments sont suffisamment rapprochés.

Ou encore, si l'on a orienté une face (n° 10) Σ_1 de notre surface, on peut convenir d'orienter de même une face contiguë à la première suivant une arête : cela consistera à choisir les parcours directs, sur les contours respectifs de ces deux faces, de manière que les sens de description de l'arête commune soient *contraires* dans les deux cas.

De celle-ci, on peut de même passer à une suivante, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait orienté toute la surface ou toute la variété (l'une ou l'autre étant supposée d'un seul tenant).

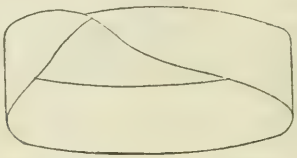
Seulement, il faut pour cela qu'on ne rencontre jamais de contradictions : autrement dit, l'orientation obtenue pour une face déterminée Σ_k devra être la même quelle que soit la série de faces intermédiaires contiguës les unes aux autres, par laquelle cette face Σ_k aura pu être atteinte en partant de la face primitive Σ_1.

S'il en est ainsi, la surface ou la variété est dite

bilatère : tel est évidemment le cas d'une sphère, qui a un côté interne et un côté externe.

Mais l'hypothèse contraire peut fort bien se présenter. Un exemple classique en est fourni par la bande de papier de Möbius (*fig.* 4) : celle-ci est obtenue en

Fig. 4.



partant d'un rectangle ABCD et soudant l'un à l'autre les côtés opposés AB, CD, mais après une torsion de 180° telle que chacun des sommets A, B vienne en coïncidence *avec celui qui lui était primitivement opposé.* Il est clair que, si l'on part d'un point P de AB en se plaçant d'un certain côté de la surface, on se trouvera du côté opposé lorsqu'on reviendra au point P en franchissant le côté CD. La surface est alors dite *unilatère.*

13. Une figure classique en Géométrie élémentaire est une variété unilatère. Nous voulons parler du *plan projectif.*

On sait qu'en Géométrie projective on ne regarde pas comme essentiellement différentes une figure tracée dans un plan Π et la perspective de cette même figure sur un autre plan Π′ avec un point de vue quelconque O.

Tout rayon issu de O est alors regardé comme coupant Π en un point déterminé, même s'il est parallèle à Π. Le plan Π est donc une variété homéomorphe à celle qui est formée par les différentes droites qui

passent par O (chacune d'elles étant regardée comme un *point*).

Si l'on avait affaire aux diverses *demi-droites* issues de O, on aurait une variété homéomorphe à une sphère, savoir : la sphère de rayon 1 qui a O pour centre et qui est coupée par chacune de ces demi-droites en un point M et en un seul.

Mais, à notre point de vue, au contraire, deux demi-droites en prolongement l'une de l'autre ne sont pas regardées comme distinctes. Donc, *le plan projectif équivaut, en Géométrie de situation, à une sphère dans laquelle deux points diamétralement opposés* M_1, M_2 *sont considérés comme formant un seul et même point.*

Il est, dès lors, clair que cette variété est unilatère, car, si le point M_1 décrit une figure quelconque, le point M_2 décrit une figure symétrique, dont on sait que l'orientation est inverse.

14. Malgré cela, les surfaces unilatères — qu'on peut, dans beaucoup de cas, ramener aux surfaces bilatères en considérant les deux côtés de l'une d'elles comme deux nappes distinctes [1] — se présentent assez rarement dans les applications. Nous supposerons toujours dans ce qui va suivre qu'il s'agit de surfaces ou variétés bilatères.

15. **Classification des lignes.** — Il est manifeste que, au point de vue de la Géométrie de situation, les lignes (d'un seul tenant et satisfaisant à l'hypothèse du n° 7) sont de deux espèces et de deux seulement :

---

[1] La sphère est déduite de la variété du n° 1 par cette transformation, puisque M_1 et M_2 correspondent à un point unique de cette variété avec les deux orientations possibles en ce point.

Ligne ouverte AB, qui n'est autre chose que ce que nous avons appelé plus haut *élément de ligne ;*

Ligne fermée (ex : circonférence de cercle).

16. **Cas des surfaces. Sections.** — Considérons maintenant les surfaces (ou les variétés à deux dimensions). Nous supposerons celles-ci d'un seul tenant.

Traçons, sur une surface donnée, une ligne déterminée L. Nous pouvons imaginer que, suivant cette ligne, on *sectionne* la surface avec des ciseaux.

Après une telle section, la ligne L fait partie du contour de la surface, et cela à double titre, car les deux lèvres de la section doivent être maintenant considérées comme deux régions entièrement séparées.

Nous considérerons surtout des *sections transverses,* c'est-à-dire des sections suivant des lignes L partant du bord et y aboutissant : c'est à elles que nous réserverons le nom de *sections,* lorsqu'il n'en sera pas spécifié autrement.

Nous supposerons également que ces lignes L seront sans points doubles et, provisoirement, que leurs extrémités seront des points distincts de la frontière.

Deux cas peuvent alors se présenter.

En général, par une section transverse, la surface sera *morcelée,* c'est-à-dire que, supposée d'un seul tenant avant la section, elle cessera de l'être après. C'est, en particulier, ce qui se produit nécessairement pour la surface d'un cercle ou tout autre élément de surface.

Mais il peut en être autrement pour d'autres formes de la surface considérée.

17. **Surfaces** (ou variétés) **simplement connexes.** — Nous supposerons tout d'abord que notre surface ait,

au moins, un bord. Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il s'agissait d'une surface fermée, nous en introduirions provisoirement un en *ponctuant* la surface, c'est-à-dire en en détachant une portion infiniment petite autour d'un point. Il revient d'ailleurs au même d'en détacher un élément de surface quelconque (lequel peut, d'une manière continue, se réduire à être infiniment petit) : par exemple, une face, si la surface est considérée comme polyédrale à la façon du n° 10.

Cela posé, une surface est dite *simplement connexe* si l'on ne peut y pratiquer une section transverse (suivant la définition précédente) sans la morceler.

Tout élément de surface est simplement connexe.

On démontre (et nous admettrons) que la réciproque est vraie; et même que, si une surface polyédrale S est telle qu'on ne puisse y pratiquer une section *composée d'arêtes de la surface* sans la morceler, S est un élément de surface [1].

18. Théorème d'Euler pour les surfaces simplement connexes. — *Dans toute surface polyédrale ouverte simplement connexe, on a*

$$F + P = A + 1, \tag{3}$$

F, A, P *désignant respectivement le nombre des faces, celui des arêtes et celui des sommets.*

Le théorème est évident pour $F = 1$, puisqu'on a manifestement alors $P = A$.

Nous le supposerons donc encore démontré pour

---

[1] Cette démonstration se fait en supposant la proposition démontrée pour toutes les surfaces polyédrales à moins de k faces et prouvant, dans ces conditions, qu'elle est nécessairement vraie pour les surfaces à k faces.

$F < k$ et prouverons dans ces conditions qu'il est encore nécessairement vrai pour $F = k$.

A cet effet, nous sectionnerons la surface par un chemin L composé d'arêtes, partant d'un point A du bord et aboutissant en un autre point B de ce bord [1]. Nous la diviserons ainsi en deux éléments S′, S″ composés chacun de moins de k faces et pour lesquels, par conséquent, nous regardons le théorème comme démontré. Si donc F′, A′, P′, F″, A″, P″ sont les nombres de faces d'arêtes et de sommets de S′ et de S″, on aura

$$F' + P' = A' + 1, \qquad F'' + P'' = A'' + 1.$$

Mais on a aussi

$$F' + F'' = F.$$

D'autre part, si la section L se compose de λ arêtes, elle a $\lambda + 1$ sommets, puisqu'elle est ouverte. Comme chacune de ces arêtes et chacun de ces sommets comptent double après la section, on peut écrire

$$A' + A'' = A + \lambda, \qquad P' + P'' = P + \lambda + 1.$$

Des égalités précédentes on tire bien l'égalité (3).

C. Q. F. D.

19. Nous verrons tout à l'heure qu'une surface fermée est dite *de genre zéro* si, une fois ponctuée, elle donne une surface ouverte simplement connexe.

Théorème d'Euler pour les surfaces fermées de genre zéro. — *Sur une surface fermée de genre zéro, on a* [2]

$$F + P = A + 2.$$

---

[1] On s'assurera aisément qu'un tel chemin existe toujours.

[2] Cette formule se trouve déjà énoncée dans Descartes, d'après une indication que je dois à l'obligeance de M. Fontené.

Car, par définition, une surface fermée de genre zéro se déduit d'une surface ouverte simplement connexe ($F + P = A + 1$) par l'addition d'une face unique, laquelle n'apporte aucune arête ni aucun sommet nouveau.

La surface d'un polyèdre convexe ordinaire est une surface fermée de genre zéro : si l'on en enlève une face, la partie restante peut être déformée continûment de manière à venir s'appliquer sur la face enlevée. *Donc le théorème d'Euler, sous la forme qui vient d'être donnée, s'applique aux polyèdres convexes.*

20. Si l'on divise en deux, par une section transverse mn, une face Σ_1 d'une surface polyédrale quelconque S, cette transformation ne change pas le nombre $F + P - A$ relatif à Σ_1 (lequel doit rester égal à 1, d'après ce qui précède).

Elle ne change donc évidemment pas non plus le nombre analogue relatif à la surface totale S.

21. **Ordre de connexion d'une surface** [1]. — Supposons maintenant que S ne soit pas simplement connexe. Il existe dès lors une section transverse L_1 qui ne la morcèle pas.

Appelons S_1 la surface ainsi sectionnée, et qui est encore d'un seul tenant. Si, à son tour, S_1 n'est pas simplement connexe, elle admettra, elle aussi, une section [2] non morcelante L_2 qui la transformera en une surface S_2, et ainsi de suite.

---

[1] Rappelons encore que toutes nos considérations s'étendent d'elles-mêmes aux variétés à deux dimensions.

[2] Les extrémités de L_2 seront prises sur la frontière de S_1, c'est-à-dire soit sur la frontière de l'aire primitive S, soit sur l'une ou l'autre des lèvres de la section L_1.

Supposons que la surface S_{N-1} obtenue au bout de $N - 1$ sections successives soit encore d'un seul tenant, mais qu'elle soit simplement connexe (de sorte qu'une $N^{ième}$ section transverse quelconque produise nécessairement le morcellement).

On nomme *ordre de connexion* de la surface l'entier N ainsi obtenu en ajoutant une unité au nombre des sections successives par lesquelles on arrive à la rendre simplement connexe sans la morceler; et l'on dit que la surface est *doublement, triplement*... connexe si son ordre de connexion est deux, trois...

Il n'est pas évident, au premier abord, que cette définition ait un sens précis; car il semble que le nombre trouvé puisse dépendre de la manière dont on choisit les sections successives.

Nous allons prouver qu'il n'en est rien.

C'est ce qui résulte du *théorème d'Euler généralisé* (pour les surfaces ouvertes).

Théorème. — *Pour une surface polyédrale ouverte dont l'ordre de connexion est* N, *on a*

$$F + P - A = 2 - N. \tag{1}$$

Pratiquons, en effet, dans notre surface la première, L_1, des sections dont nous avons parlé. Supposons d'abord que L_1 soit composé d'arêtes de la surface, et soit λ le nombre de ces arêtes, de sorte que le nombre des sommets situés sur L_1 est $\lambda + 1$. Ces arêtes et ces sommets devant, après la section, compter chacun pour deux, toutes choses égales d'ailleurs, le nombre $F + P - A$ va être augmenté d'une unité.

Mais on peut toujours admettre que L_1 est composé d'arêtes de la surface, en considérant comme autant de nouvelles arêtes les segments de L_1 situés dans les

faces successives, opération qui ne change pas la valeur de $F + P - A$ (numéro précédent). La conclusion est donc vraie en tout cas.

Chacune des sections successives L_2, ... ajoute de même une unité à la valeur de $F + P - A$. Comme, par hypothèse, au bout de $N - 1$ sections, ce nombre devient égal à 1 (en vertu du n° 18), il était primitivement de $2 - N$. C. Q. F. D.

22. On peut d'ailleurs démontrer que, par un système fini de sections successives, on peut toujours amener une surface polyédrale à être simplement connexe sans la morceler.

Il suffit, pour cela, de nous astreindre à composer les sections successives avec des arêtes de S.

On ne peut alors certainement pas continuer indéfiniment le sectionnement sans morceler, puisque, en sectionnant suivant toutes les arêtes, on isolerait toutes les faces les unes des autres.

Or, lorsque l'opération sera arrêtée, c'est-à-dire lorsqu'on sera arrivé à une surface telle que toute section composée d'arêtes la morcèle, nous avons dit (17) que cette surface sera simplement connexe.

23. Il est donc complètement démontré que *toute surface* vérifiant les hypothèses des n°s 7 et 10 *a un* **ordre de connexion** bien *déterminé*.

Cet ordre est donné soit par sa définition, soit par la formule (4) (théorème d'Euler).

24. *Exemple.* — Soit la *surface de Riemann* S considérée au n° 9.

Pratiquons, dans cette surface, des sections projetées respectivement suivant des lignes $a_k\, b_k$, allant de chacun des points a, *l'un d'eux* (a_1, par exemple) *excepté*, à la circonférence C.

Les sections ainsi définies sont bien des sections

transverses. Chacune d'elles a pour extrémités les deux points projetés suivant un même point b_k du cercle C.

Ainsi sectionnée, la surface S est devenue simplement connexe. On peut, en effet, par une déformation continue, réduire S à la portion de S qui est projetée suivant une circonférence de centre a_1. Or celle-ci est (8) un élément de surface.

D'après cela, l'ordre de connexion N cherché est égal à n.

Le théorème d'Euler, appliqué à la décomposition polyédrale du n° 10, donne aisément le même résultat.

25. Nous allons maintenant montrer, du moins pour les surfaces (ou variétés) bilatères [1], que l'ordre de connexion peut être considéré comme la somme de deux quantités dont chacune séparément est invariante par déformation continue.

L'une de ces quantités est le nombre des contours fermés distincts dont se compose la frontière : nombre qui, par exemple, pour la surface de Riemann (n° 9), est égal à deux ou à un, suivant que n est pair ou impair. Un tel nombre r ne change évidemment pas lorsqu'on déforme continûment : il est donc le même pour deux surfaces homéomorphes.

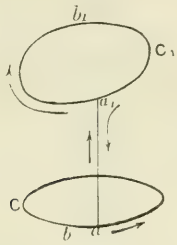
Supposons $r > 1$, de sorte qu'il existe au moins deux bords distincts C, C_1 (*fig.* 5). Si l'on fait une section aa_1 allant d'un de ces bords à l'autre, la surface n'est pas morcelée (car, pour passer d'un côté à l'autre de aa_1, il suffit de faire le tour de C ou celui

---

[1] Ce qui précède à partir du n° 16 est vrai, que la surface soit bilatère ou non.

de C_1); mais les deux bords précédents sont remplacés par un bord unique $aa_1b_1a_1aba$ (*fig.* 5).

Fig. 5.



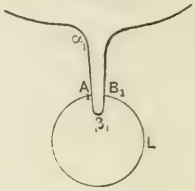
Nous tracerons de même une section allant de C à chacun des autres contours C_2, ..., C_{r-1}. Par ces $r-1$ sections, nous n'aurons pas morcelé la surface; mais nous l'aurons réduite à avoir sa frontière formée d'un seul contour, susceptible d'être décrit d'un trait continu.

26. Supposons donc maintenant que notre surface a un seul bord. Si elle n'est pas simplement connexe, on pourra, sans la morceler, sectionner suivant une certaine ligne L joignant entre eux deux points A_1, B_1 du bord en question. On peut évidemment faire glisser chacun d'eux d'une manière arbitraire sur ce bord.

On peut aussi, d'autre part, entailler la surface suivant une ligne allant d'un point α_1 du bord à un point β_1 pris dans l'intérieur (*fig.* 6) : il est clair qu'une telle entaille peut être considérée comme une déformation continue de la frontière et de la surface elle-même. Les deux lèvres de l'entaille faisant alors partie du bord, plaçons A_1 et B_1 en face l'un de l'autre, respectivement sur ces deux lèvres et dans le voisinage de β_1.

Tout se passera alors comme si nous sectionnions suivant un chemin (*fig.* 6 *bis*) composé de la ligne $\alpha_1 A_1$ et d'une ligne fermée λ_1 partant du point A_1 et y revenant.

Fig. 6.



Une section de cette espèce est dite une *section en sigma*. On voit qu'on peut la ramener à une section transverse.

Fig. 6 *bis*.

Nous venons de supposer que la section en sigma ainsi obtenue ne morcèle pas la surface. Dès lors, il en sera ainsi *a fortiori* si l'on en supprime le trait $\alpha_1 A_1$ de manière à ne sectionner que suivant la ligne fermée λ_1.

Ainsi, *si une surface limitée par un contour unique n'est pas simplement connexe, il existe à son intérieur au moins une ligne fermée suivant laquelle on peut la sectionner sans produire le morcellement.*

27. *Rétrosections.* — Remarquons maintenant qu'*à*

une ligne fermée (sans point double) λ_1, *le long de laquelle on a pu sectionner la surface sans la morceler, on peut adjoindre une seconde ligne fermée* λ'_1 *jouissant de la même propriété.*

En effet, considérons deux points de la surface, infiniment voisins d'un même point o_1 (*fig.* 8) de λ_1, mais de part et d'autre de λ_1. Par hypothèse (puisque λ_1 ne morcèle pas), ces deux points peuvent être joints par un chemin λ'_1 sans point commun avec λ_1.

Lorsque ses deux extrémités viendront se confondre avec o_1, ce chemin deviendra une ligne fermée λ'_1 rencontrant λ_1 en un seul point o_1.

La relation ainsi établie entre λ_1 et λ'_1 est évidemment réciproque. En particulier, λ'_1 est, comme λ_1, une ligne suivant laquelle la surface peut être sectionnée sans être morcelée : il suffit, pour passer d'un côté à l'autre de λ'_1, de suivre le chemin λ_1.

Mais, si la surface est bilatère, le morcellement ne se produit pas non plus si l'on sectionne à la fois suivant λ_1 et suivant λ'_1.

Numérotons, en effet, de I à IV, de la manière qui est indiquée sur la figure 7, les angles formés en o_1 par λ_1 et λ'_1. Si, partant d'un point voisin de o_1 et situé dans l'angle I, on côtoie d'un bout à l'autre λ'_1 sans le traverser, on reviendra aux environs de o_1 sans avoir changé de côté par rapport à λ'_1, c'est-à-dire qu'on se trouvera dans l'angle II. Pour une raison toute semblable, on passera de l'angle II à l'angle III en suivant λ_1, puis de celui-ci à IV en suivant λ'_1; et, enfin, on pourra de là revenir à l'angle I en suivant λ_1.

Les quatre angles I-IV peuvent donc être mis en communication les uns avec les autres, et, par conséquent, avec un point quelconque de la surface sans traversée de λ_1 ni de λ'_1.

Lors de la section suivant λ_1, la surface acquiert deux bords nouveaux : les deux lèvres de la section. La section suivant λ'_1 a pour effet de réunir ces deux bords entre eux et, par conséquent (*cf.* n° 25), de les réduire à un seul.

Pour décrire ce dernier d'un bout à l'autre, on voit qu'il faut suivre le chemin par lequel nous avons appris, il y a un instant, à passer de l'angle I aux angles II, III, IV pour revenir ensuite à l'angle I. Chacune des lignes λ_1, λ'_1 est ainsi décrite deux fois en sens inverses, comme le montrent les flèches de la

Fig. 7.

figure 7. C'est ce qui a fait donner à cette figure le nom de *rétrosection*.

Enfin, le bord ainsi déterminé pourra (toujours sans morcellement, en vertu du n° 25) être relié au bord primitif par une section $\alpha_1 A_1$.

L'ensemble des sections $\alpha_1 A_1$, λ_1, λ'_1 représente *deux sections transverses*, savoir : une section en sigma composée de $\alpha_1 A_1$ et de λ_1, et la section λ'_1 qui joint deux points du double bord créé par la précédente.

28. **Genre**. — Supposons qu'après avoir sectionné à la fois suivant λ_1 et λ'_1, il existe encore une ligne fermée λ_2 (sans point commun avec les premières) le

long de laquelle on puisse sectionner sans morcellement.

L'existence de la ligne fermée λ_2 entraînera, d'autre part, celle d'une seconde ligne λ'_2 qui coupe λ_2 en un point unique o_2 et forme avec elle une seconde rétrosection; après quoi l'on pourra ou non, suivant la forme de la surface, en trouver une troisième, et ainsi de suite.

Chacune des rétrosections successives constituera un nouveau bord. On pourra joindre chacun de ces nouveaux bords au bord primitif ou à un des bords créés avant lui (c'est-à-dire à une des rétrosections précédentes) par des lignes $\alpha_1 A_1$, $\alpha_2 A_2$, $\alpha_3 A_3$, ... En sectionnant suivant ces lignes, on ramènera le bord à être unique s'il l'était primitivement.

On appelle **genre** d'une surface le nombre p des rétrosections que l'on peut ainsi opérer, autrement dit *le nombre des couples de lignes fermées* (*deux quelconques de ces lignes ayant un point commun unique si elles sont du même couple, et n'en ayant aucun dans le cas contraire*) *suivant lesquelles on peut sectionner simultanément la surface en la laissant d'un seul tenant.*

29. *Exemples.* — Un plan, une sphère ont évidemment pour genre *zéro*.

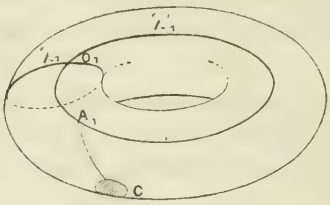
Le type le plus simple de surface à genre non nul est fourni par le TORE (*fig.* 8) ($p = 1$). On peut alors prendre pour λ_1 un méridien et pour λ'_1 un parallèle (*fig.* 8). En sectionnant suivant le méridien λ_1, on obtient un anneau brisé qu'on peut évidemment déformer en la surface latérale d'un cylindre, le parallèle λ'_1 devenant une génératrice de ce cylindre.

En fendant suivant cette génératrice, on transforme

la surface en un rectangle (*fig.* 9), dont le contour correspond à la rétrosection (λ_1, λ'_1).

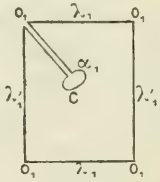
Si, comme nous l'avons fait précédemment (n° **17**), on supposait la surface ponctuée, C (*fig.* 8) étant, par

Fig. 8.



exemple, le contour de la petite portion enlevée, on devrait joindre C à la rétrosection par une ligne $\alpha_1 A_1$.

Fig. 9.



C'est ce qui est supposé sur la figure 9, où l'on a admis, en outre, que le point A_1 coïncide avec o_1.

30. De même, un type de surface de genre p est constitué par un disque (par exemple une pièce de monnaie) percé de p TROUS (*fig.* 10).

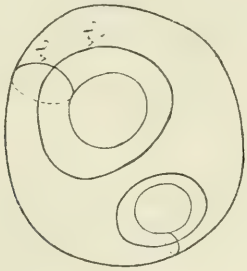
Un contour λ_i est alors celui qui part de la tranche du disque sur une face et y revient par l'autre après avoir passé à travers un trou ; le contour λ'_i correspondant est celui qui fait le tour du même trou (*fig.* 10).

31. Nous avons vu que l'ensemble de chaque rétro-

section et de la section $\alpha_i A_i$ correspondante représente deux sections transverses.

On aura donc, de ce chef, $2p$ sections transverses à opérer dans une surface de genre p.

Fig. 10.



Le nombre r des bords (que l'ensemble des opérations précédentes laisse inaltéré) peut, d'autre part, être réduit à l'unité par $r - 1$ sections, comme nous l'avons vu.

Moyennant les $2p + r - 1$ sections dont nous venons de parler, notre surface est (n° 26) rendue simplement connexe, puisqu'elle a un bord unique et qu'on ne peut pas y tracer de section fermée non morcelante.

Donc *l'ordre de connexion* N *d'une surface bilatère* (satisfaisant aux hypothèses fondamentales) *est donné en fonction du nombre r des bords distincts et du genre p par la formule*

$$N = r + 2p.$$

Il résulte de là que *le genre p ne dépend pas du choix des rétrosections*, puisque les nombres N et r sont indépendants de ce choix.

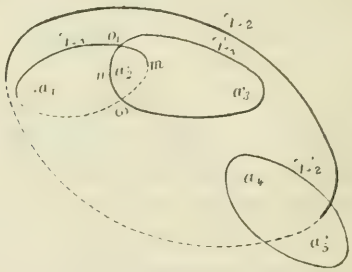
Remarque. — En particulier, il est bien exact,

comme nous l'avions énoncé au n° 19, que toute surface fermée qui, ponctuée, donne une surface simplement connexe, est de genre zéro, et réciproquement.

32. *Exemple.* — La *surface de Riemann* considérée au n° 9 a pour ordre de connexion $N = n$; comme elle a 1 ou 2 bords, suivant la parité de n, *son genre p est* $\frac{n-2}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, *suivant que n est pair ou impair.*

Il est d'ailleurs aisé d'y tracer un système de p rétrosections. n étant supposé au moins égal à 3 (sans quoi on aurait $p = 0$), un contour λ_1 sera celui qui est projeté suivant une courbe fermée (*fig.* 11) (sans point

Fig. 11.



double) comprenant à son intérieur les deux points d'affixes a_1, a_2 [à l'exclusion de tout autre point-racine de $R(Z)$]. Comme, après description d'une telle courbe, le radical $\sqrt{R(Z)}$ revient à sa valeur primitive, λ_1 se ferme non seulement en projection sur le plan des Z, mais sur la surface elle-même.

Quant à λ'_1, il sera projeté suivant une courbe fermée comprenant a_2 et a_3. Une telle courbe a, avec λ_1, deux points communs o_1, ω (*fig.* 11) en projection,

mais un seul [1] sur la surface S. On pourra donc appliquer à ces deux courbes tout ce qui a été dit au n° 27 et constituer avec elles une première rétrosection.

On en aura une seconde s'il existe deux nouveaux points-racines a_4, a_5 : elle sera formée de deux lignes fermées dont l'une, λ_2, tourne (en projection) autour des points précédents et de a_1, a_4, l'autre autour de a_4, a_5 (*fig.* 11).

En continuant ainsi, on formera des rétrosections dont le nombre est bien celui qui a été indiqué plus haut.

33. Les considérations qui précèdent nous amènent à la conclusion suivante :

Il existe deux nombres dont chacun a la même valeur pour deux surfaces homéomorphes quelconques (celles-ci satisfaisant à nos hypothèses générales et étant supposées bilatères).

Ces deux nombres sont le *nombre r des bords distincts* et le *genre p*.

Réciproquement, *si deux surfaces (ou variétés à deux dimensions) ont le même nombre de bords et le même genre, elles sont homéomorphes.*

Soient, par exemple, S et T deux surfaces de genre 1 et à un seul bord.

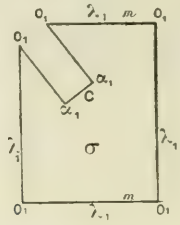
Nous avons vu que S pouvait être transformée par sectionnement et déformation continue en un rectangle

---

[1] En effet, dans le plan des Z, l'ensemble des deux arcs $\omega m o_1$, $o_1 n \omega$ (*fig.* 11), empruntés respectivement à λ_1, λ'_1, forme une ligne fermée qui tourne une fois autour de a_2 et telle, par conséquent, que les valeurs initiale et finale de $\sqrt{R(Z)}$ soient différentes, du moins si ce radical ne change pas de valeur en o_1, lorsqu'on passe d'un des arcs à l'autre.

échancré tel que celui de la figure 9 : ou encore (en écartant les deux lèvres de la section $\alpha_1 o_1$) en un polygone σ à sept côtés, comme celui de la figure 12.

Fig. 12.



Dans cette transformation, λ_1, par exemple, donne deux côtés du polygone, chaque point m de λ_1 donnant deux points situés respectivement sur ces deux côtés. Nous avons évidemment le droit de supposer que les deux points qui se correspondent ainsi divisent semblablement les côtés qu'ils décrivent. Nous ferons également la même supposition sur λ'_1 et sur $a_1 o_1$.

Nous opérerons de même sur T, qui sera transformé en un heptagone analogue τ.

Il est évident qu'on peut établir entre les polygones σ et τ une correspondance biunivoque et continue dans laquelle les côtés qui se correspondent soient ceux qui jouent un rôle analogue, les points correspondants sur ces côtés étant ceux qui les divisent semblablement.

Or, en définissant une telle correspondance, on établit par là même, entre les surfaces primitives S et T, une correspondance qui est, elle aussi, parfaitement biunivoque et continue (grâce au fait que deux points du contour de σ dérivés d'un même point de S correspondent à deux points du contour de τ dérivés d'un même point de T). C. Q. F. D.

Nous nous sommes placés dans le cas simple de

$p = r = 1$. Mais il suffit, pour refaire cette démonstration dans le cas général, que, sur S et T, les coupures analogues soient elles-mêmes disposées dans le même ordre ([1]) ; et l'on peut toujours faire qu'il en soit ainsi.

La correspondance entre S et T peut même, en général, être établie de plusieurs manières distinctes ; car on peut, sur l'une des surfaces, intervertir les rôles de deux bords, ou de deux rétrosections, ou ceux des deux lignes λ_i, λ'_i qui composent une même rétrosection ([2]) (sans parler de l'arbitraire que comporte, comme on s'en assure aisément, le choix des rétrosections, dès que p dépasse l'unité).

34. On voit, par exemple, que la surface de Riemann précédemment considérée est homéomorphe à la surface du disque à p trous (n° 30), p étant calculé comme il est dit au n° 32 ([3]) et le disque étant ponctué en un ou deux endroits, suivant la parité de n.

([1]) On s'arrangera, par exemple, pour qu'en suivant, dans le sens direct le bord C de S dont il a été question au n° 25, on rencontre successivement toutes les sections transverses qui vont aux autres bords, puis toutes celles qui vont aux rétrosections, la même chose ayant lieu sur T.

([2]) Pour citer un exemple, deux tores sont homéomorphes l'un à l'autre, soit en considérant les parallèles de l'un comme correspondant aux parallèles de l'autre et les méridiens aux méridiens, soit en considérant les méridiens de l'un comme correspondant aux parallèles de l'autre, et *vice versa*.

On obtient une correspondance de ce second type en prenant l'inverse du tore par rapport à un point quelconque d'un cercle convenablement choisi (celui qui coupe à angle droit toutes les sphères qui ont les circonférences méridiennes comme grands cercles).

([3]) On trouvera dans les Traités d'Analyse (*voir*, par exemple, Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 419) le détail d'une déformation continue permettant de passer de l'une de ces surfaces à l'autre.

35. Cette même surface nous fournit un exemple simple de l'utilité des méthodes précédentes.

z et Z étant liés par la relation

$$z = \sqrt{R(Z)},$$

on est conduit, en Géométrie analytique, à rechercher s'il peut exister une variable t en fonction de laquelle z et Z puissent s'exprimer rationnellement, avec cette condition qu'à une valeur donnée de Z et à une valeur donnée de z [satisfaisant à l'équation (2)] corresponde en général une valeur de t et une seule.

C'est ce qui a lieu si R(Z) est du premier ou du second degré, l'équation (2) représentant alors une conique.

Mais il est évident maintenant que la variable t ne peut plus exister si $p > 0$, c'est-à-dire si $n \geqq 3$. En effet, si elle existait, la surface de Riemann S correspondant à l'équation (2) devrait être représentée sur le plan des t par une certaine portion de ce plan [1]. Or c'est ce qui est visiblement impossible, puisque toute portion de plan a pour genre zéro, au lieu que le genre de S est différent de zéro.

Cette question se trouve, comme on sait, résolue, quoique par des considérations notablement plus compliquées, dans les cours de Géométrie analytique. Mais il n'en est pas de même pour celle de savoir si entre

---

[1] Cette portion de plan pourrait, il est vrai, s'étendre à l'infini si la valeur $t = \infty$ correspondait à une valeur finie $Z = \alpha$ de Z. Mais (outre qu'on peut ici éviter qu'il en soit ainsi par une transformation homographique effectuée sur t) on ramènera le domaine de variation de t à être situé à distance finie, en retranchant de la surface S la partie qui est projetée suivant un petit cercle de centre α : cette opération ne change pas le genre de S.

L'objection précédente ne se présente pas lorsqu'on considère des surfaces de Riemann *fermées* [*voir* p. 204, note [1]].

l'équation (2) et une équation analogue

$$(2') \qquad z_1 = \sqrt{R_1(Z_1)}$$

peut exister une correspondance *birationnelle,* c'est-à-dire si à chaque système de valeurs de z, Z vérifiant la relation (2) on peut faire correspondre un système de valeurs de z_1, Z_1 vérifiant (2'), de manière que z_1, Z_1 soient des fonctions rationnelles de z, Z, et z, Z des fonctions rationnelles de z_1, Z_1.

Or, dans cette question comme dans la précédente, nous aurons aisément une condition nécessaire pour l'existence de la correspondance cherchée, celle que les surfaces de Riemann définies par les deux équations données aient même genre [1].

Elle entraîne celle que les degrés des polynomes R et R_1, s'ils ne sont pas égaux, diffèrent au plus d'une unité, le plus grand étant alors pair.

36. Que devient enfin le théorème d'Euler pour les surfaces fermées de genre quelconque p?

Ponctuons une telle surface en lui enlevant une de ses faces. Étant alors munie d'un bord unique, elle aura l'ordre de connexion $2p+1$, d'où $F+P-A=1-2p$. En rétablissant la face enlevée tout d'abord, on a

$$F+P-A=2-2p.$$

37. **Classification des lignes tracées sur une surface.** — Si, sur un élément de surface, on donne deux

---

[1] Il faudrait, sous la forme que nous avons donnée à la définition de ces surfaces, les limiter (pour les rendre homéomorphes) de telle manière que les contours limites se correspondent. Nous n'insisterons pas sur la réalisation de cette condition, qui s'étudiera comme dans le cas précédent et qui ne se pose pas quand on considère les surfaces comme fermées.

points A, B, et qu'on joigne ces deux points par une ligne déterminée, toute autre ligne joignant les mêmes points et intérieure à l'élément pourra se ramener à la première par une déformation continue dans laquelle les points A, B resteront fixes.

Il n'en est évidemment pas de même sur un tore ou sur une couronne circulaire.

Proposons-nous de trouver toutes les manières distinctes dont on peut joindre deux points donnés A, B sur une surface donnée S.

A cet effet, commençons par imaginer qu'on rende celle-ci simplement connexe, et cela en employant la méthode même que nous avons décrite aux n°s 25-28 et en supposant que toutes les lignes de jonction telles que aa_i ou $\alpha_i A_i$ partent du même bord C. Soit S′ la surface ainsi sectionnée.

S′ étant d'un seul tenant, on peut joindre A à B, d'une infinité de manières, par un chemin intérieur à S′, c'est-à-dire par un chemin intérieur à S et ne traversant pas nos coupures. Tous les chemins qu'on peut tracer dans ces conditions sont réductibles l'un à l'autre, puisque S′ est simplement connexe : ils forment, à notre point de vue, un seul et même type, que nous appellerons le type *canonique*.

Un chemin qui longe d'un bout à l'autre le bord C_1, par exemple, coupera nécessairement, au contraire, une de nos lignes de section (la ligne aa_1 par laquelle nous avons joint C_1 à C). Nous désignerons par le symbole C_1 ou C_1^{-1} (suivant le sens du parcours) un tel chemin ou, plus généralement, celui qu'on obtient en allant d'un point donné quelconque A (sans traverser les coupures) à un point μ de C_1, décrivant C_1 de manière à revenir en μ puis allant de là en un point donné B (ce dernier parcours étant encore

effectué de manière canonique, c'est-à-dire à l'intérieur de S').

Mais, après avoir décrit C_1 par exemple, on peut, au lieu d'aller en B par voie canonique, commencer par aller décrire un autre des contours fermés précédemment énumérés (¹), λ_1 par exemple, pour n'aboutir en B qu'ensuite. Le chemin total ainsi obtenu sera désigné par $C_1\lambda_1$ (ou $C_1\lambda_1^{-1}$, suivant le sens dans lequel λ_1 sera parcouru); et ainsi de suite.

Il est aisé de voir qu'inversement tout chemin tracé sur S pourra être ramené à une combinaison des contours *fondamentaux*

$$C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r-1), \qquad \lambda_j, \lambda'_j \quad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

reliés entre eux par des chemins tracés dans S'.

En effet, on pourra, toutes les fois que le chemin en question traversera une de nos sections, le déformer de manière que cette traversée ait lieu suivant un arc $\mu\mu'$ d'un des contours fondamentaux, $-C_1$ par exemple, si la section traversée est aa_1 (²). Puis on pourra (toujours par continuité) agrandir cet arc de manière à lui faire comprendre C_1 tout entier, le point μ' coïncidant avec μ.

En opérant ainsi toutes les fois qu'on traversera une coupure, on ramènera bien notre chemin, quel qu'il

---

(¹) Ce second contour pourra être C_1 lui-même, auquel cas le symbole représentatif sera C_1^2, à moins que ces deux descriptions consécutives de C_1 n'aient lieu en sens contraire, auquel cas elles se détruiraient, cette partie du chemin pouvant être rendue canonique par déformation continue.

(²) Si la section traversée est λ_i, le contour correspondant est λ'_i et inversement. Quant à une ligne telle que $\alpha_i A_i$, le contour correspondant est la rétrosection complète (représentable évidemment par un symbole tel que $\lambda_i\lambda'_i\lambda_i^{-1}\lambda'^{-1}_i$), puisque celle-ci peut être considérée comme un bord de S', joint à C par la ligne $\alpha_i A_i$.

soit, à une série de descriptions des contours fondamentaux, et l'on pourra le représenter par un symbole composé des lettres C_i, λ_j, λ'_j pouvant figurer chacune plusieurs fois et affectées ou non d'exposants.

C'est ce que le lecteur vérifiera sans difficulté sur quelques aires simples. Sur la surface latérale d'un cylindre, par exemple, toute ligne fermée [1] sera caractérisée par le nombre de tours qu'elle effectuera autour de la surface, et qu'on pourra toujours supposer décrits le long d'un parallèle. Par conséquent, un fil étant enroulé d'une manière quelconque sur un anneau brisé, c'est-à-dire (*voir* n° 29) sur un tore fendu suivant un méridien λ_1 (*fig.* 8), on pourra faire glisser les spires qu'il décrira de manière à les appliquer toutes sur λ_1. Sur un tore complet, la même opération sera encore possible, à cette réserve qu'elle pourra évidemment occasionner, entre deux spires consécutives, la présence de portions faisant une ou plusieurs fois le tour de la surface suivant un parallèle (contour λ'_1). Si le tore est ponctué suivant C (*fig.* 8), la déformation du fil pourra être arrêtée par la présence de C; mais cela reviendra à dire qu'il s'enroulera une ou plusieurs fois autour de C; etc.

Si l'on écrit une telle liste de symboles de cette espèce choisis et rangés d'une manière déterminée, on aura, par là même, défini un type bien déterminé de chemins : tous les chemins correspondant à la même liste de symboles sont équivalents entre eux au point de vue qui nous occupe. Ils sont réductibles à la série des contours que ces symboles représentent, reliés entre

---

[1] On ne diminue pas la généralité en se bornant aux lignes fermées, puisqu'on peut transformer tout chemin allant de A à B en un chemin canonique, suivi d'un chemin fermé allant de B à B.

eux (et aux points A et B) par des chemins ne rencontrant pas nos lignes de section [1].

38. **Application aux intégrales définies.** — Considérons, sur la surface S, une intégrale curviligne [2].

Cette intégrale, qui est relative à un arc de ligne tracé entre deux points A, B, peut, comme on sait, être de forme telle qu'elle ne change pas de valeur lorsqu'on déforme d'une manière continue la ligne d'intégration en en laissant les extrémités fixes. C'est ce qui a lieu si, la position d'un point sur la surface (ou du moins sur une portion suffisamment petite quelconque de cette surface) étant définie par deux quantités x, y, l'intégrale en question est de la forme $P\,dx + Q\,dy$, où P et Q sont deux fonctions de x, y vérifiant la relation

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Sur une surface simplement connexe, une telle relation entraîne nécessairement (lorsqu'on suppose P, Q finis et continus) que l'intégrale a la même valeur pour *tous* les chemins joignant entre deux points donnés.

Mais elle n'est plus suffisante pour deux chemins qu'on ne peut pas réduire l'un à l'autre par déformation continue; or il existe de tels chemins dès que la surface est à connexion multiple.

Par contre, la conclusion reste valable pour les chemins que nous avons appelés *canoniques,* puisque tous ces chemins sont réductibles les uns aux autres.

---

(1) Nous n'étudions pas la question de savoir si deux symboles différents peuvent représenter le même type de chemins. Les simplifications possibles d'un symbole se réduisent d'ailleurs, en général, à celle qui a été notée page 231, note (1).

(2) *Voir,* par exemple, GOURSAT, *Cours d'Analyse,* t. I, p. 357.

Mais, d'autre part, nous venons de voir que tous les autres chemins pouvaient se déduire des chemins canoniques par l'addition de parcours C_i, C_i^{-1}, ...

Soient alors I_{C_i}, I_{λ_i}, I'_{λ_i} les valeurs que prend l'intégrale donnée lorsqu'on décrit respectivement les contours fermés C_i, λ_i, λ'_i (l'intégrale suivant C_i^{-1} étant évidemment égale à $-I_{C_i}$).

On devra ajouter ou retrancher, à l'intégrale, l'une de ces quantités I_{C_i}, ... chaque fois que sera décrit, dans un sens ou dans l'autre, le contour correspondant.

L'intégrale prise le long de AB sera donc égale à l'intégrale prise le long d'un chemin canonique, augmentée d'une combinaison linéaire, à coefficients entiers positifs ou négatifs [1], des $2p + r - 1 = N - 1$ quantités I_{C_i}, I_{λ_i}, I'_{λ_i}.

C'est, en particulier, cette évaluation qui s'applique aux *intégrales elliptiques et hyperelliptiques*, c'est-à-dire aux intégrales de la forme

$$\int \varphi(Z) \frac{dZ}{\sqrt{R(Z)}},$$

où $\varphi(Z)$ est une fraction rationnelle.

De telles intégrales peuvent être considérées comme prises sur une surface de Riemann, celle qui est définie par l'équation (2) : c'est seulement sur une telle surface que le radical $\sqrt{R(Z)}$ et, par suite, la quantité sous le signe $\int$ sont bien déterminés.

Par suite, l'intégrale peut admettre (et admet, en

---

[1] Ces coefficients ne dépendent que du nombre total des fois où chaque contour est décrit (les descriptions dans un sens étant défalquées des descriptions en sens contraire). Ici, par conséquent, l'ordre des lettres du symbole représentatif est indifférent. Il peut n'en pas être de même dans d'autres applications de la théorie.

général) $2p$ *périodes* correspondant aux lignes λ_i, λ'_i de la surface de Riemann. C'est ce qui se vérifie en effet. Par exemple, les périodes de l'intégrale *elliptique,* qui correspond à

$$R(Z) = (Z - a_1)(Z - a_2)(Z - a_3)(Z - a_4),$$

d'où $p = 1$, sont bien, conformément à ce qui précède, les intégrales prises suivant des contours enveloppant, l'un les points a_1, a_2, l'autre les points a_2, a_3.

De plus, la quantité $\varphi(Z)$ devient, en général, infinie en certains points; et l'on doit considérer la surface comme *ponctuée* en ces points, puisqu'en leur voisinage le théorème de Cauchy n'est plus applicable.

Ces ponctuations donneront autant de contours C_i qui fourniront autant de nouvelles périodes (périodes *polaires*) de l'intégrale.

[A3d]

DE L'USAGE PRATIQUE DU THÉORÈME DE STURM;

PAR M. R. DE MONTESSUS.

On dit fréquemment que le théorème de Sturm est, en lui-même, fort beau, mais qu'on ne peut l'utiliser pour les équations de degré supérieur au quatrième. Encore ne s'appliquerait-il à celles-ci que dans le cas où leurs coefficients sont particulièrement simples.

Cela est vrai si l'on adopte le mode de formation usuel des suites de Sturm. Certaines suites, convenablement choisies, permettent cependant d'étendre considérablement, et de façon très élémentaire, la portée pratique du théorème. On le verra par ce qui suit.

Rappelons l'énoncé du théorème de Sturm.

Si, *par un procédé quelconque*, on a formé une suite de $m+1$ fonctions continues

$$(S) \qquad f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ f_m(x)$$

possédant les propriétés suivantes :

I. Deux fonctions consécutives ne s'annulent pas pour une même valeur de l'intervalle Δ, défini par deux nombres réels α, β ($\alpha < \beta$).

II. La fonction $f_m(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de l'intervalle Δ, et conserve par suite un signe constant dans cet intervalle.

III. Lorsqu'une fonction intermédiaire $f_j(x)$ s'annule pour une valeur de l'intervalle, les fonctions voisines $f_{j-1}(x)$, $f_{j+1}(x)$ acquièrent pour cette même valeur de x des signes contraires.

IV. Lorsque $f(x)$ s'annule pour une valeur de l'intervalle, $f_1(x)$ acquiert le même signe que $f'(x)$.

Cela posé :

Le nombre des racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

comprises entre α et β est égal à l'excès du nombre de variations que présente la suite (S) pour $x = \alpha$ sur le nombre de variations qu'elle présente pour $x = \beta$.

L'énoncé est *complet;* il ne comporte *aucune* restriction, sauf celle de continuité, dont il n'y a pas lieu de se préoccuper pour les équations algébriques.

D'ordinaire, on forme comme il suit la suite (S) ; on prend $f'(x)$ pour $f_1(x)$; puis on effectue sur $f(x)$, $f'(x)$ la suite d'opérations qui a pour effet de former leur plus grand diviseur ; $f_2(x)$ est le reste de la divi-

sion de $f(x)$ par $f'(x)$, $f_3(x)$ est le reste de la division de $f'(x)$ par $f_2(x)$, etc.

C'est ainsi que l'équation

$$f(x) = 0 = x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$$

donne lieu à la suite de Sturm

$$\begin{aligned}
f_1(x) = f'(x) &= 6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1,\\
f_2(x) &= 11x^4 - 14x^3 - 33x^2 + 31x - 37,\\
f_3(x) &= -1050x^3 + 1683x^2 - 1731x - 597,\\
f_4(x) &= -10200643x^2 - 37927049x + 58788113,\\
f_5(x) &= 29712797489933533x - 34125179949003500 20,\\
f_6 &= -\text{environ } 154 \times 10^{41},
\end{aligned}$$

avec les relations

$$\begin{aligned}
p\, f(x) &= (\alpha x - \beta) f'(x) - f_2(x),\\
q\, f'(x) &= (\gamma x - \delta) f_2(x) - f_3(x),\\
r\, f_2(x) &= (\varepsilon x - \theta) f_3(x) - f_4(x),\\
s\, f_3(x) &= (\eta x - \xi) f_4(x) - f_5(x),\\
u\, f_4(x) &= (\pi x - \rho) f_5(x) - f_6(x),
\end{aligned}$$

où p, q, r, s, u sont des nombres positifs qu'il nous est indifférent de connaître.

Reprenons la même équation et considérons la suite, *assurément beaucoup plus simple*,

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &= x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1,\\
\varphi_1(x) = f'(x) &= 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,\\
\varphi_2(x) &= x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x - 1,\\
\varphi_3(x) &= 8x^3 + 10x^2 - 12x - 1,\\
\varphi_4(x) &= 43x^2 + 27x - 39,\\
\varphi_5(x) &= 1551x - 1043,\\
\varphi_6 &= 3363221,
\end{aligned}$$

qui donne lieu aux relations

$$f(x) + \varphi_1(x) - x(x+1)\varphi_2(x) = 0,$$
$$\varphi_1(x) + (2x+1)\varphi_2(x) - x(x+1)\varphi_3(x) = 0,$$
$$5\varphi_2(x) - (6x+5)\varphi_3(x) + x(x-1)\varphi_4(x) = 0,$$
$$-713\varphi_3(x) + (313x - 152)\varphi_4(x) - 5(x^2-1)\varphi_5(x) = 0,$$
$$1043^2\varphi_4(x) - (32328x + 39)\varphi_5(x) + x^2\varphi_6 = 0.$$

Il est immédiat que :

Pour $\alpha < \beta < -1$,

$$(\sigma_1)\quad \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad f(x), \\ \varphi_1(x),\ -\varphi_2(x),\ -\varphi_3(x),\ -\varphi_4(x),\ -\varphi_5(x),\ \varphi_6 \end{array}\right.$$

est une suite de Sturm, ce qui permet de calculer le nombre de racines réelles comprises entre deux nombres α, β, l'un et l'autre plus petits que -1;

Pour $-1 < \alpha < \beta < 0$,

$$(\sigma_2)\quad f(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \varphi_4(x),\ \varphi_5(x),\ \varphi_6$$

est une suite de Sturm;

Pour $0 < \alpha < \beta < 1$,

$$(\sigma_3)\quad \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad f(x), \\ \varphi_1(x),\ -\varphi_2(x),\ -\varphi_3(x),\ \varphi_4(x),\ \varphi_5(x),\ -\varphi_6 \end{array}\right.$$

est une suite de Sturm ;

Pour $1 < \alpha < \beta$,

$$(\sigma_4)\quad \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad f(x), \\ \varphi_1(x),\ -\varphi_2(x),\ -\varphi_3(x),\ -\varphi_4(x),\ -\varphi_5(x),\ \varphi_6 \end{array}\right.$$

est encore une suite de Sturm.

Les signes divers employés sont nécessités par la condition III.

Supposons qu'on veuille calculer le nombre de racines réelles comprises entre $0,5$ et $\frac{7}{}$. La suite (σ_3) indiquera combien de racines sont comprises entre $0,5$

et $1-\varepsilon$, et la suite (σ_4) combien de racines sont comprises entre $1+\varepsilon$ et 7.

De même, l'équation

$$f(x) = 0 = x^4 - x^3 - 15x^2 + 19x - 3,$$

traitée par la méthode du plus grand commun diviseur, donne lieu à la suite de Sturm

$$\begin{aligned} f(x),\quad f'(x) = \varphi_1(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 30x + 19, \\ \varphi_2(x) &= 123x^2 - 196x + 29, \\ \varphi_3(x) &= 193399x - 137958, \\ \varphi_4 &= 28510683 13059, \end{aligned}$$

tandis qu'on peut prendre comme suite de Sturm les polynomes

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^3 - 15x^2 + 19x - 3, \\ f'(x) = \psi_1(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 30x + 19, \\ \psi_2(x) &= 14x^2 - 59x + 176, \\ \psi_3(x) &= 429x + 2843, \\ \psi_4 &= 2843\frac{14}{429} + 429\frac{176}{2843} - 59 > 0, \end{aligned}$$

affectés de signes convenables, que les relations

$$\begin{aligned} 30f(x) - (11x - 14)\psi_1(x) + (x^2 - 1)\psi_2(x) &= 0, \\ 98\psi_1(x) - (28x - 97)\psi_2(x) + 5\psi_3(x) &= 0, \\ \psi_2(x) - \left(\frac{14}{429}x + \frac{176}{2843}\right)\psi_3(x) - x\psi_4 &= 0 \end{aligned}$$

indiqueront.

Voici, expliquée sur l'équation

$$f(x) = x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 = 0,$$

la manière de former les suites de Sturm employées.

On a

$$f_1(x) = f'(x) = 6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1.$$

Posons

$$\begin{aligned}F_2(x) &= f(x) + (\lambda x + \rho) f'(x)\\ &= (6\lambda + 1)x^6 + (5\lambda - 6\rho + 1)x^5\\ &\quad - (4\lambda - 5\rho + 1)x^4 - (3\lambda + 4\rho + 1)x^3\\ &\quad - (2\lambda - 3\rho + 1)x^2 - (\lambda - 2\rho + 1)x - (\rho - 1).\end{aligned}$$

Si l'on dispose de λ et ρ de manière à annuler les coefficients de x^6 et x^5, on procède comme si l'on cherchait le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f_1(x)$, mode de calcul fort long, on l'a dit ; or, ici,

$$\begin{aligned}F_2(0) &= -(\rho - 1),\\ F_2(1) &= 5\lambda + 5\rho + 1,\\ F_2(-1) &= 3\lambda - 3\rho + 3,\end{aligned}$$

et l'on peut prendre λ, ρ de manière à annuler deux des expressions

$$F_2(0), \quad F_2(1), \quad F_2(-1);$$

le plus simple ici est d'annuler $F_2(-1)$, $F_2(0)$, ce qui donne

$$\rho = 1, \qquad \lambda = 0$$

et

$$\begin{aligned}F_2(x) &= f(x) + f'(x)\\ &= x(x+1)(x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1),\end{aligned}$$

d'où

$$f(x) + f'(x) - x(x+1) f_3(x) = 0,$$

en posant

$$f_3(x) = x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1.$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned}F_3(x) &= f'(x) + (\mu x + \eta) f_2(x)\\ &= (\mu + 6)x^5 + (6\mu + \eta + 5)x^4 - (2\mu - 6\eta + 4)x^3\\ &\qquad - (3\mu + 2\eta + 3)x^2 + (\mu - 3\eta - 2) + \eta - 1;\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} F_3(0) &= \eta - 1, \\ F_3(1) &= 3\mu + 3\eta - 5, \\ F_3(-1) &= 3\mu - 3\eta - 3, \end{aligned}$$

et le plus simple est d'annuler encore $F_3(0)$, $F_3(-1)$, ce qui donne

$$\eta = 1, \qquad \mu = 2$$

et

$$\begin{aligned} F_3(x) &= f'(x) + (2x+1) f_2(x) \\ &= x(x+1)(8x^3 + 10x^2 - 12x + 1); \end{aligned}$$

posant

$$f_3(x) = 8x^3 + 10x^2 - 12x + 1,$$

on aura

$$f'(x) + (2x+1) f_2(x) - x(x+1) f_3(x) = 0;$$

on aurait pu prendre

$$\eta = 1, \qquad \mu = 1,$$

ce qui aurait conduit à

$$f'(x) + (2x+1) f_2(x) - x^2 f_3(x) = 0$$

avec

$$f_3(x) = 7x^3 + 12x^2 - 8.$$

résultat un peu plus simple; etc.

On voit qu'une part assez large est laissée à l'arbitraire.

On traiterait de même l'équation

$$x^4 - x^3 - 15x^2 + 19x - 3 = 0.$$

En définitive, *étant donnée une équation de degré m*

$$f(x) = 0.$$

on pose

$$F_2(x) = f(x) + (\alpha x + \beta) f'(x),$$

et l'on détermine α, β :

Soit de manière à annuler les termes de degrés m, $m-1$ de $F_2(x)$ (méthode du plus grand commun diviseur);

Soit de manière à annuler le terme de degré m de $F_2(x)$ et à mettre en évidence un facteur du premier degré $px+q$ de $F_n(x)$;

Soit de manière à mettre en évidence deux facteurs de premier degré, $hx+k$, $lx+m$, de $F_2(x)$,

En prenant garde que α, β soient des nombres aussi simples que possible.

Dans le premier cas,

$$f_2(x) = F_2(x), \qquad f(x) - (\alpha x + \beta) f'(x) - f_2(x) = 0;$$

dans le second,

$$f_2(x) = \frac{F_2(x)}{px - q},$$

$$f(x) - (\alpha x - \beta) f'(x) - (px - q) f_2(x) = 0;$$

dans le troisième,

$$f_2(x) = \frac{F_2(x)}{(hx - k)(lx - m)},$$

$$f(x) - (\alpha x + \beta) f'(x) - (hx - k)(lx + m) f_2(x) = 0,$$

et, dans les trois cas, $f_2(x)$ est de degré $m-2$.

On pose ensuite

$$F_3(x) = f'(x) + (\gamma x + \delta) f_2(x)$$

et l'on détermine $f_3(x)$ comme on a déterminé $f_2(x)$, de manière que ce nouveau polynome soit de degré $m-3$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un polynome de degré zéro;

$$f(x), \quad f'(x), \quad \pm f_2(x), \quad \pm f_3(x), \quad \ldots \quad \pm f_{m-1}(x), \quad \pm f_m,$$

où les signes sont choisis (*voir* l'équation étudiée) de

manière à vérifier la condition III des suites de Sturm, *est une suite de Sturm pour l'équation proposée* $f(x) = 0$, *suite*, sauf cas exceptionnels, *beaucoup plus simple que la suite formée par le procédé usuel du plus grand commun diviseur.*

CORRESPONDANCE.

M. H. Brocard. — L'utilité de reviser et de perfectionner la démonstration d'une certaine propriété de maximum, énoncée par Steiner, qui a fait l'objet d'un récent article de M. A. Padoa (1908, p. 529-535), avait été rappelée, il y a 30 ans, par M. H. Edler, de Halle. A cette occasion, M. Edler a publié au journal de Hoffmann (*Zeitschrift f. Math. u. Naturw. Unterricht*, t. X, 1879, p. 245) une démonstration où il a cherché à réaliser plus de simplicité.

Quelque temps après, il y apporta un nouveau perfectionnement dans une Note présentée à la Société royale de Göttingue par M. Schwarz, et dont la traduction par M. Pautonnier a été publiée au *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. G. Darboux, 1883, p. 198-204.

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Paris.

I. Épreuve théorique. — 1. *Sur deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *on construit le rectangle* OABC, *dont le sommet* C *a pour coordonnées les deux nombres positifs* a *et* b, *l'abscisse* a *étant inférieure ou égale à* 1.

Calculer l'intégrale

$$\int \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{x^2+2y}{1-y^2}\,dy,$$

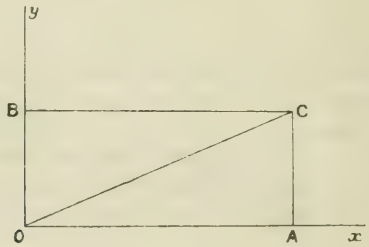
prise de l'origine O *au point* C, *le long de chacun des contours suivants :*

1° *La ligne brisée* OAC,

2° *La ligne brisée* OBC,

3° *La diagonale* OC.

Indiquer, en particulier, les valeurs de ces intégrales pour $a = 1$, $b = 1$.



2. *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *déterminer une courbe* C *telle qu'en menant la tangente* MA *en un point quelconque* M *de cette courbe, et appelant* A *le point où cette tangente rencontre l'axe* Oy, *on ait, entre les deux distances* OA *et* OM, *la relation* OA = OM.

3. *Déterminer la fonction* y *de* x *qui vérifie l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + y = e^x - \cos x,$$

où m *est une constante donnée.*

Discuter la forme de l'intégrale générale suivant les diverses valeurs de m. Examiner, en particulier, les cas

$$m = -1, \quad m = 0, \quad m = +1.$$

II. Épreuve pratique. — 1. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près les intégrales*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{2 + \cos x + \sin x}, \qquad \int_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

2. *Calculer le moment d'inertie par rapport à son axe de révolution de chacun des solides suivants, supposé homogène et de densité* ρ :

1° *Cylindre de révolution de rayon* R *et de hauteur* h;

2° *Cône de révolution de rayon de base* R *et de hauteur* h;

3° *Ellipsoïde engendré par la révolution d'une ellipse d'axes* $2a$ *et* $2b$ *autour du grand axe* $2a$.

(Octobre 1907.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2091.

(1908, p. 96.

Le nombre n étant supposé impair, démontrer que, si l'on évalue la quantité $\frac{\sin nx}{\sin x}$ *en fonction de* $\cos x$, *l'expression obtenue est un produit de deux facteurs rationnels. Que représente chacun de ces facteurs?*

(G. F.)

SOLUTION

Par l'Auteur.

La solution insérée au précédent Volume (p. 575) est erronée. Il faut entendre ici par facteurs rationnels des facteurs *à coefficients rationnels*, et les deux facteurs indiqués ne vérifient pas cette condition.

Si l'on écrit

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \sqrt{\frac{1-\cos nx}{1-\cos x}}\sqrt{\frac{1-\cos nx}{1+\cos x}},$$

on reconnaît aisément que, pour n impair, chacune des deux quantités placées sous un radical s'exprime en fonction de $\cos x$ par un polynome à coefficients rationnels qui est un carré parfait, et la question se trouve ainsi complètement résolue.

On a, par exemple,

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = (4\cos^2 x + 2\cos x - 1)(4\cos^2 x - 2\cos x - 1);$$

les racines du premier facteur sont

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \cos\frac{4\pi}{5},$$

et celles du second facteur sont

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \cos\frac{\pi}{5}.$$

AUTRE SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Posons

$$n = 2m+1.$$

On a

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} = \frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\frac{\cos(2m+1)\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.$$

Mais

$$\frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p C_{2m+1}^{2p+1}\cos^{2m-2p}\frac{x}{2}\sin^{2p}\frac{x}{2},$$

$$\frac{\cos(2m+1)\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p C_{2m+1}^{2p}\cos^{2m-2p}\frac{x}{2}\sin^{2p}\frac{x}{2}.$$

Remplaçant dans ces expressions $\cos^2\frac{x}{2}$ et $\sin^2\frac{x}{2}$ par leurs expressions en fonction de $\cos x$, on a finalement

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} = \left[\frac{1}{2^m}\sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p C_{2m+1}^{2p+1}(1-\cos x)^p(1+\cos x)^{m-p}\right]$$
$$\times\left[\frac{1}{2^m}\sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p C_{2m+1}^{2p}(1-\cos x)^p(1+\cos x)^{m-p}\right].$$

2104

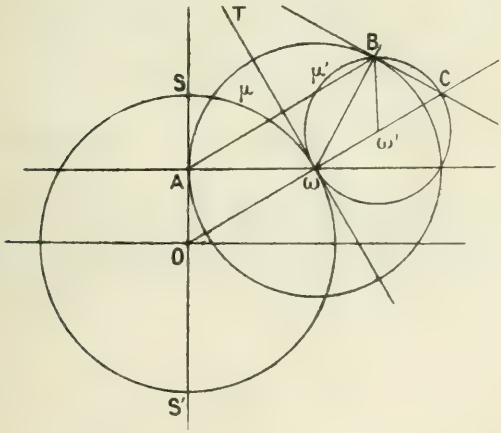
(1908, p. 179.)

Étant donnée une ellipse de demi-axes R *et* 2R, *le cercle ayant pour diamètre une demi-corde parallèle au grand axe enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements.*

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Le lieu du milieu des demi-cordes parallèles au grand axe



dans l'ellipse considérée est le cercle G de rayon R concentrique à l'ellipse. Soit ω l'un des cercles envisagés : il touche

son enveloppe au point B symétrique de son point de contact A avec le petit axe de l'ellipse par rapport à la tangente au cercle G en ω. La tangente en B au cercle ω coupe $O\omega$ en C ; le triangle ωBC est égal au triangle ωAO ; par suite,

$$\omega C = O\omega = R.$$

Soit ω' le centre du cercle décrit sur ωC comme diamètre ; $\widehat{\omega\omega' B} = 2$ fois l'angle $\widehat{AO\omega}$: par suite, les arcs $\widehat{S\mu\omega}$ et $\widehat{\omega\mu' B}$ sont égaux, et le lieu du point B, enveloppe du cercle ω, est l'épicycloïde à deux rebroussements engendrée par un point du cercle ω' roulant sur le cercle O, les deux rebroussements étant S et S'.

Autres solutions par MM. G. Pélissier, Lez, Rose, Têtu.

QUESTIONS.

2130. On donne un carré ABCD et un cercle concentrique à ce carré. Pour chaque point M de ce cercle, on a

$$\overline{MA}^{2n} + \overline{MB}^{2n} + \overline{MC}^{2n} + \overline{MD}^{2n} = \text{const.},$$

n étant un nombre entier et positif. (E.-N. Barisien.)

2131. On projette un point M variable du cercle circonscrit à un triangle donné ABC, sur les côtés BC, CA, AB en P, Q, R. Le lieu du milieu de chacun des segments PQ, QR, RP de la droite PQR est un cercle. (E.-N. Barisien.)

[P'6f]

SUR UNE TRANSFORMATION DE DROITES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Définition analytique. — Soient p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 les coordonnées plückériennes d'une droite D, les trois premières étant les cosinus directeurs; soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection sur D de l'origine O des coordonnées rectangulaires. En posant

$$p'_1 = -p_1, \qquad p'_2 = -p_2, \qquad p'_3 = -p_3,$$
$$p'_4 = x_0, \qquad p'_5 = y_0, \qquad p'_6 = z_0,$$

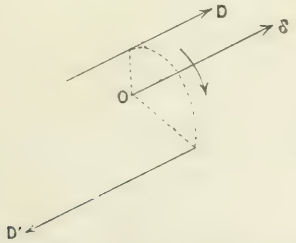
les p' sont les coordonnées d'une droite D'; les coordonnées de la projection sur D' de O sont

$$x'_0 = p_4, \qquad y'_0 = p_5, \qquad z'_0 = p_6.$$

Les formules précédentes définissent donc une *transformation de droites univoque et réciproque.*

Définition géométrique. — Soit O un point fixe de

Fig. 1.



l'espace, qui suffit à lui seul pour définir la transformation. Étant donné un vecteur D quelconque de l'es-

pace, menons par O l'axe δ équipollent à D; autour de δ faisons tourner D de l'angle $\frac{\pi}{2}$ de gauche à droite pour un observateur couché sur δ, la tête en O, les pieds dirigés vers δ. D, après cette rotation, vient occuper une certaine position; prenons sur elle un vecteur D′ de sens opposé à celui de D. D correspond à D′, comme D′ correspond à D.

Application aux séries réglées. — La transformation fait correspondre une série réglée à une série réglée et les deux séries sont réciproques: à une droite D du plan Oxy, correspond une droite parallèle rencontrant Oz : la transformation établit donc une correspondance entre les conoïdes droits de directrice Oz et les courbes du plan Oxy; l'équation de la tangente à la courbe étant

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha = \varpi,$$

les équations de la génératrice correspondante du conoïde sont

$$z = \varpi, \qquad x\cos\alpha - y\sin\alpha = 0;$$

la cote de la génératrice est la distance de O à la tangente; le paramètre de distribution est la distance de O à la normale à la courbe.

C'est ainsi qu'à l'*hélicoïde gauche*

$$z = a\theta, \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

correspond la développante de circonférence

$$\varpi = a\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right);$$

qu'au *cylindroïde de Cayley-Plücker*

$$z = \frac{2axy}{x^2 - y^2},$$

correspond l'hypocycloïde à quatre rebroussements

$$\varpi = -a \sin 2\alpha;$$

qu'au *conoïde droit de directrice* Oz, *circonscrit à la sphère* $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = R^2$, *correspond une ellipse* de foyers

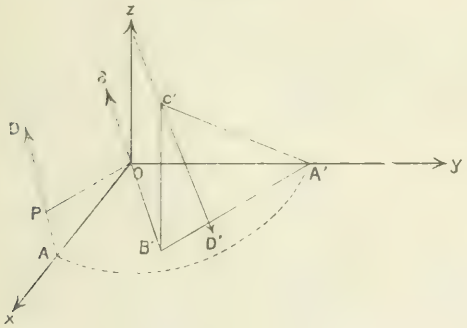
$$x = 0, \qquad y = \pm a,$$

de grand axe $2R$.

Dans le cas particulier du *conoïde de Wallis, l'ellipse dégénère tangentiellement en deux points;* ces deux points proviennent des deux sens distincts qui peuvent être choisis sur les génératrices du conoïde. Voici d'ailleurs une démonstration géométrique élémentaire de ce dernier résultat. Considérons un trièdre trirectangle $Oxyz$ et, sur Ox, un point A.

Supposons le vecteur D issu de A et situé dans Oxy;

Fig. 2.



le vecteur D' rencontre Oz et est situé comme sur la figure. Lorsque D tourne autour de A, D' engendre un conoïde droit de directrice Oz.

Prenons sur Oy le point A', obtenu en faisant tourner A autour de Oz dans le sens direct (les axes sont *à droite*); projetons A' sur δ en B', sur D' en C';

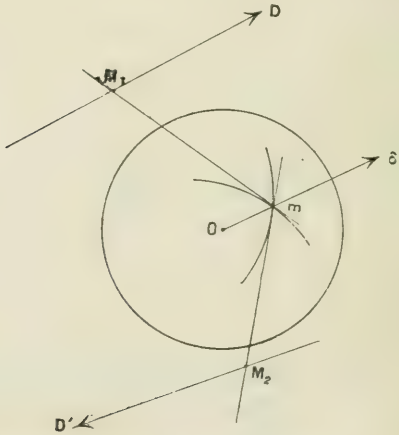
projetons O sur D en P. B'C' parallèle à Oz a pour longueur OP, distance de O à D; A'B' est égal à AP, puisque les triangles rectangles OPA, OB'A' sont égaux. Les deux triangles rectangles OPA et C'B'A' sont donc égaux et, par suite, A'C' est égal à OA. La droite D' est donc tangente à la sphère de centre A' et qui passe par O; D' engendre dès lors un conoïde de Wallis.

Application aux congruences. — I. *La transformation laisse invariante toute congruence isotrope de Ribaucour relative à un réseau isothermique d'une sphère de centre* O. Considérons une sphère de centre O rapportée à un système isothermique (u, v) :

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2).$$

Sur la tangente en m à la courbe (u), portons

Fig. 3.



$mM_1 = \lambda$; menons par M_1 la parallèle au rayon Om; cette droite est le rayon d'une congruence isotrope (théorème de Ribaucour). Appliquons la transforma-

tion relative au point O. Prenons sur cette droite un vecteur D : δ est sur Om ; comme les courbes (u) et (v) sont orthogonales sur la sphère, D vient en D′ et D′ est le rayon de la congruence relatif à la courbe (v).

Bien entendu, le même théorème peut être démontré analytiquement. Soient u, v les paramètres d'une droite de la congruence, E, F, G, e, f, f', g les coefficients des deux formes différentielles de la congruence ; pour une congruence isotrope, on a

$$\frac{e}{E} = \frac{f+f'}{2F} = \frac{g}{G}.$$

Choisissons pour paramètres u, v ceux des génératrices de la sphère ; E et G sont nuls. D'où les conditions pour qu'une congruence soit isotrope

$$\sum \frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v} = 0,$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées du point de départ et p_1, p_2, p_3 les cosinus directeurs du rayon. Choisissons pour point de départ la projection de O sur le rayon

$$x_0 = p_3 p_5 - p_2 p_6, \qquad \ldots;$$

nous avons alors

$$\sum \frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u} = -i\sum \frac{\partial p_2}{\partial u}\frac{\partial p_1}{\partial u}, \qquad \sum \frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v} = i\sum \frac{\partial p_2}{\partial v}\frac{\partial p_1}{\partial v}.$$

Appliquons la transformation ; les nouveaux paramètres sont liés aux anciens par les formules

$$uv' = -1, \qquad vu' = -1;$$

d'où

$$\sum \frac{\partial p'_1}{\partial u'}\frac{\partial x'_0}{\partial u'} = -\frac{1}{u'^2}\sum \frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial p_2}{\partial v},$$

$$\sum \frac{\partial p'_1}{\partial v'}\frac{\partial x'_0}{\partial v'} = -\frac{1}{v'^2}\sum \frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial p_2}{\partial u}.$$

De la comparaison de ces diverses formules résulte la vérification du théorème.

Comme application, on peut démontrer qu'en général, dans un complexe donné, il n'y a pas de congruence isotrope.

II. *A une congruence de normales ne correspond pas une congruence de normales; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les droites* (D) *soient les normales à une famille de surfaces de M. Appell ayant le point* O *pour développée moyenne.*

Considérons en effet une droite D de cosinus directeurs p_1, p_2, p_3; soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection de O sur D. Pour que les deux congruences transformées soient des congruences de normales, il faut que les expressions

$$U = p_1\, dx_0 + p_2\, dy_0 + p_3\, dz_0,$$
$$U' = p'_1\, dx'_0 + p'_2\, dy'_0 + p'_3\, dz'_0$$

soient des différentielles totales. Or

$$U' = -(p_1\, dp_4 + p_2\, dp_5 + p_3\, dp_6) = p_4\, dp_1 + p_5\, dp_2 - p_6\, dp_3.$$

Introduisons les coordonnées de Bonnet, c'est-à-dire définissons une des surfaces dont les normales constituent la congruence D comme enveloppe du plan

$$X(u - v) + iY(v - u) + Z(uv - 1) = \varpi(uv - 1):$$

on a

$$(p_4, p_5, p_6) = \frac{i}{2}(1 + uv)^2 \left[\frac{\partial(\varpi, p_1)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\varpi, p_2)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\varpi, p_3)}{\partial(u, v)}\right],$$

d'où, en désignant par p, q, r, s, t les dérivées partielles de la fonction ϖ de (u, v),

$$U' = \frac{i}{2}(1 + uv)^2 \sum \left(p\frac{\partial p_1}{\partial v} - q\frac{\partial p_1}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial p_1}{\partial u}\, du - \frac{\partial p_1}{\partial v}\, dv\right)$$
$$= i(p\, du - q\, dv).$$

La condition pour que U′ soit une différentielle totale est donc

$$s = 0;$$

c'est l'équation des surfaces de M. Appell.

Application aux complexes. — Pour qu'un complexe soit invariant, il faut et il suffit que O soit centre de symétrie pour le complexe et que tous les cylindres du complexe soient de révolution.

Le complexe de Painvin, pour une quadrique de centre O, *est invariant*. Considérons le complexe de Painvin des droites par lesquelles passent deux plans tangents rectangulaires à une quadrique à centre O; étant donné un cylindre du complexe, menons par O le plan perpendiculaire à la direction de ce cylindre. Ce plan coupe la quadrique suivant une conique de centre O; il coupe les plans tangents menés à la quadrique par une génératrice du cylindre suivant deux tangentes rectangulaires à la conique issues de la trace de la génératrice sur le plan : la trace du cylindre est, par suite, le cercle orthoptique de cette conique. Le cylindre est de révolution et son axe passe par O. D'où le théorème, qui résulte aussi de l'équation du complexe de Painvin.

La démonstration de ce théorème met en évidence une propriété de la surface qui limite la région de l'espace occupée par les projections de O sur les rayons du complexe de Painvin (*surface des vitesses normales* de l'Electroptique, dans le cas de l'ellipsoïde) : cette surface limite la région de l'espace occupée par les cercles orthoptiques des sections planes diamétrales de la quadrique [1].

---

[1] *Cf.* la question analogue (pour *toutes* les sections planes)

Le complexe

$$(B - C)\frac{p_1}{p_4} - (C - A)\frac{p_2}{p_5} - (A - B)\frac{p_3}{p_6} = 0$$

(auquel appartiennent les génératrices des quadriques homofocales et homothétiques) *est invariant.*

Le complexe

$$(B - C)\frac{p_4}{p_1} + (C - A)\frac{p_5}{p_2} - (A - B)\frac{p_6}{p_3} = 0$$

(polaire réciproque du précédent, par rapport à une sphère) est transformé en le *complexe tétraédral*

$$\Sigma \alpha p_1 p_4 = 0.$$

Le *complexe linéaire spécial* est transformé en le *complexe des droites équidistantes de deux points.*

Complexe transformé du complexe *des droites sur lesquelles la projection de* O *se fait en un point d'une surface donnée* S : le complexe est constitué par les *tangentes aux cercles transformés apsidaux des divers points de* S, dans la transformation apsidale définie par O.

Étude de la transformation de droites du point de vue de la théorie des transformations de contact. — La transformation n'est pas de contact : à deux droites qui se rencontrent, ne correspondent pas deux droites se rencontrant. A deux droites (D, Δ) se rencontrant, ne correspondent des droites se rencontrant que si, D étant donnée, Δ appartient à une congruence, intersection d'un complexe linéaire spécial avec un complexe du deuxième ou du quatrième ordre, suivant que D passe par O ou non. Dans le premier

---

n° 1765 des *Nouvelles Annales* (1897, Mannheim), et la solution de M. R. Bricard (1907).

cas, la congruence est celle des droites issues de O. Dans le second cas, elle a pour *nappes focales la droite* D *et la sphère de centre* O *tangente à* D.

La démonstration analytique est simplifiée en prenant pour équations réduites d'une telle congruence

$$p_6 = -ap_2, \qquad p_2p_4 - p_1p_5 = -ap_1.$$

Tenant compte de la relation

$$p_1p_4 + p_2p_5 = -p_3p_6,$$

il vient

$$\begin{aligned}(p_1^2 - p_2^2)(p_4^2 + p_5^2) &= a^2(p_1^2 - p_2^2p_3^2),\\ (p_1^2 - p_2^2)(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) &= a^2(p_1^2 + p_2^2p_3^2 + p_2^2p_1^2 + p_2^4)\\ &= a^2(p_1^2 - p_2^2);\end{aligned}$$

la solution $p_1^2 + p_2^2 = 0$ correspond aux parallèles à D. L'équation

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = a^2$$

exprime que les rayons de la congruence touchent une sphère de centre O, de rayon a.

Ceci résulte encore du théorème suivant de Géométrie qu'il est aisé d'établir : *Soient deux vecteurs tangents à un cercle tracé sur une sphère de centre* O *et de même sens par rapport à la circulation sur la circonférence; les vecteurs se transforment en deux autres tangents à un cercle de la sphère dont le plan est parallèle à celui du premier.*

Corollaires et applications. — *La surface transformée d'un conoïde de Wallis circonscrit à une sphère de centre* O *est de même nature.*

Appelant *demi-hyperboloïde* une série réglée d'un hyperboloïde réglé, la *surface transformée d'un demi-hyperboloïde de révolution d'axe passant par* O *est une surface de même nature; elle peut dégénérer en un cône.*

A une série développable (autre qu'un cône) circonscrite à une sphère de centre O, *correspond une série de même nature.*

[T4c]

SUR LA CONDUCTION THERMIQUE;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Les *Nouvelles Annales* de 1907 ont publié une Note de M. Alezais, dans laquelle l'auteur montre que, P étant la partie réelle et Q le coefficient de l'imaginaire i provenant d'une fonction $f(z)$ à variable complexe

$$f(z) = P - iQ,$$

si l'une des fonctions P, Q est donnée, l'autre en résulte *sans quadrature*. L'auteur applique ensuite ce théorème à diverses questions de licence.

Je signale une propriété importante qui en résulte et qui est relative à l'étude thermique d'un plan indéfini.

Lorsque le potentiel thermique T *est donné, les lignes de courant sont déterminables sans quadrature.*

En effet, l'équation différentielle des lignes de courant est

$$\left(\rho\frac{\partial T}{\partial x} - K_2\frac{\partial T}{\partial y}\right)dx - \left(\rho\frac{\partial T}{\partial y} - K_1\frac{\partial T}{\partial x}\right)dy = 0.$$

Par un changement de variable (transformation homographique), on peut se ramener au cas pour lequel

$$K_1 = K_2 = 1;$$

T satisfait alors à l'équation de Laplace. Soit Θ la fonc-

tion associée à T, *déterminable sans quadrature*, d'après le théorème de M. Alezais.

En tenant compte des relations

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial y},$$

l'équation différentielle devient

$$\left(\rho \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) dx + \left(\rho \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right) dy = 0;$$

d'où l'intégrale

$$\rho T + \Theta = \text{const.}$$

Appliquant au cas d'une source punctiforme (en coordonnées polaires)

$$T = -T_0 \log r, \qquad \Theta = -T_0 \theta,$$

on trouve immédiatement les spirales logarithmiques

$$\rho \log r + \theta = \text{const.}$$

Appliquant au cas de deux sources égales et de signes contraires, on a

$$T = T_0(\log r_1 - \log r_2),$$
$$\Theta = T_0(\theta_1 - \theta_2),$$

d'où les lignes de courant [1].

P.-S. — J'ai reçu une observation relative à mon Mémoire *Sur certains systèmes orthogonaux du plan*. Il s'agit des surfaces considérées par M. Laurent. Cet auteur ne s'était pas préoccupé de l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces. Comme le calcul ressemble à celui qui avait été fait par Jamet, j'ai cru devoir signaler ce dernier calcul. La Note est peut-être

---

[1] J'adopte les notations du *Cours de Physique* que publie M. H. Bouasse. C'est donc de préférence à cet Ouvrage que le lecteur devra se reporter : Tome II, *Thermodynamique, Théorie des ions*, au paragraphe 257. Il pourra lire aussi le paragraphe 52 du Tome V (*Électroptique, ondes hertziennes*).

obscure, mais je n'ai commis aucune erreur : *Étant donnée une intégrale* P *de l'équation de Laplace, il lui correspond une fonction analytique* $f'(z)$ *dont le module est la racine carrée de l'invariant différentiel du premier ordre de* P.

En prenant, en effet,

$$f(z) = P + iQ,$$

on a, par dérivation,

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y};$$

d'où

$$|f'(z)| = \sqrt{\Delta_1 P}.$$

Il est, d'ailleurs, possible d'obtenir l'équation très rapidement. Soit z une fonction analytique et soit Z la fonction analytique définie par la relation

$$z = e^Z;$$

on a, par définition,

$$Z = \log|z| + i \arg. z.$$

Des équations

$$\Delta_2 Z = 0, \qquad \Delta_2(\arg. z) = 0$$

résulte l'équation des surfaces

$$\Delta_2(\log|z|) = 0.$$

[N° 3b]

NOUVEAUX TYPES DE CONGRUENCES LINÉAIRES DE CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

L'étude de plusieurs congruences linéaires de cubiques gauches rencontrées par MM. Stuyvaert (1) et

(1) M. STUYVAERT, *Cinq études de Géométrie analytique*, (Prix F. Dernyts). Gand, Van Gœthem, 1908.

Veneroni peut être facilitée par l'emploi d'une transformation birationnelle entre deux espaces; en même temps, on découvre d'autres types de congruences linéaires de cubiques gauches; c'est ce que nous voulons montrer dans cette Note.

1. Soient Σ_1, Σ_2 deux espaces linéaires et ponctuels à trois dimensions superposés ou non, et dans le premier de ces espaces une courbe gauche C_1 d'ordre 6 et de genre 3. On sait que les surfaces cubiques passant par une telle courbe sont en nombre ∞^3 et que trois de ces surfaces cubiques, si elles ne font pas partie d'un même faisceau, se rencontrent encore en un point unique. Deux surfaces cubiques se rencontrent encore suivant une cubique gauche octosécante de la courbe C_1.

Cela étant, entre les ∞^3 surfaces cubiques passant par C_1 et les plans de l'espace Σ_2, établissons une collinéation. Par le fait même, on établit une correspondance birationnelle entre les deux espaces Σ_1, Σ_2. A un point commun à trois plans de Σ_2 on fait correspondre le point commun aux trois surfaces cubiques correspondantes dans Σ_1, et inversement.

Aux points d'une droite de Σ_2 correspondent les points d'une cubique gauche de Σ_1, donc aux points d'un plan de Σ_1 correspondent les points d'une surface cubique de Σ_2. De même, on voit qu'aux points d'une droite de Σ_1 correspondent les points d'une cubique gauche de Σ_2.

Les ∞^3 surfaces cubiques de Σ_2 correspondantes aux plans de Σ_1 passent par une courbe gauche C_2 du sixième ordre et de genre 3; les ∞^4 cubiques gauches correspondantes aux droites de Σ_1 s'appuient huit fois sur C_2.

A un point d'une courbe C correspondent dans l'autre

espace les points d'une droite, car la courbe C de cet espace est simple sur la surface cubique transformée d'un plan du premier espace. Ces droites engendrent une surface du huitième ordre, car la transformée d'une droite quelconque d'un espace est une cubique gauche octosécante de la courbe C de l'autre espace.

Soient A un point de C_1, a la droite de Σ_2 qui correspond à A. Aux ∞^2 droites passant par A correspondent ∞^2 cubiques gauches dégénérées en une droite fixe a et une conique mobile ; le nombre de ces coniques étant ∞^2, elles ne peuvent s'appuyer qu'au plus en cinq points sur C_2, et par conséquent a est une trisécante de C_2.

Ainsi, aux points d'une courbe C correspondent les trisécantes de l'autre.

La transformation que nous venons de définir a été étudiée par Cayley (1), Cremona (2) et par MM. Loria (3), Nœther (4) et R. Sturm (5).

2. On obtient aisément l'expression analytique de

---

(1) *On the rational transformation beween two spaces* (*Proceeding of the London Mathematical Society*, t. III, 1870, p. 127-180. — *On the transformation of unicursal surfaces* (*Math. Ann.*, t. III, 1871, p. 469-474).

(2) *Mélanges de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (*Journal de Crelle*, t. 68, 1868, p. 72-75). — *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (*Rendiconti del R. Ist. Lomb.*, t. IV, 1871, 2e série, p. 269-279 et 315-324). — *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (*Annali di Matematica*, t. V, 1871, 2e série, p. 132-162).

(3) *Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terzo ordine* (*Atti di Torino*, t. XXVI, 1890, p. 275).

(4) *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen insbesondere in ihrer Anwendung auf Abbildung algebraischer Flächen* (*Math. Annalen*, t. III, 1871, p. 552-556).

(5) *Ueber diejenigen Cremonaschen Verwandschaften bei denen den Ebenen des einen Raumes allgemeine Flächen 3. Ordnung andern entsprechen* (*Jahr. der D. Math. Vereinigung*, t. XIV, 1905, p. 18-24).

la transformation. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes courantes de l'espace Σ_1; y_1, y_2, y_3, y_4 celles de l'espace Σ_2.

Soient

$$a_x,\ a'_x,\ a''_x;\ b_x,\ b'_x,\ b''_x;\ c_x,\ c'_x,\ c''_x;\ d_x,\ d'_x,\ d''_x$$

des formes quaternaires linéaires en (x). Leur égalité à zéro nous donnera douze plans quelconques de Σ_1.

La sextique C_1 a pour équations [1]

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Une surface cubique circonscrite à la courbe C_1 est représentée pour l'évanouissement du déterminant

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Si

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = 0$$

est l'équation d'un plan quelconque de Σ_2, la collinéation entre les plans de cet espace et les surfaces (1) peut être représentée par

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4.$$

Dans ces conditions, les équations de la transformation sont

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4$$

$$= \begin{vmatrix} b_x & c_x & d_x \\ b'_x & c'_x & d'_x \\ b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_x & d_x & a_x \\ c'_x & d'_x & a'_x \\ c''_x & d''_x & a''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_x & a_x & b_x \\ d'_x & a'_x & b'_x \\ d''_x & a''_x & b''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x \end{vmatrix}.$$

---

[1]) Stuyvaert, *loc. cit.*

3. Aux ∞^3 droites d'une congruence G de Σ_2 correspondent dans Σ_1 les cubiques gauches d'une congruence Θ possédant la sextique C_1 comme courbe octosingulière. Ainsi l'étude d'une telle congruence de cubiques gauches se trouve ramenée à celle d'une congruence de droites.

Supposons que la congruence G considérée dans Σ_2 soit d'ordre m et de classe n. La congruence Θ de cubiques gauches correspondantes dans Σ_1 est d'ordre m (¹) et de classe égale au nombre de droites de G s'appuyant deux fois sur une cubique gauche, donc $m + 3n$.

A l'aide de la transformation, on établit aisément les théorèmes suivants :

Les cubiques gauches de Θ qui s'appuient sur une courbe d'ordre μ et sur une courbe d'ordre μ' sont au nombre de $9\mu\mu'(m+n)$.

Les cubiques gauches de Θ qui s'appuient deux fois sur une courbe d'ordre μ et de genre p sont au nombre de

$$\left[\frac{(3\mu-1)(3\mu-2)}{1.2} - p\right]m + \frac{3\mu(3\mu-1)}{1.2}n.$$

Les surfaces engendrées par ∞^1 cubiques de Θ ont toutes les caractères $P_g = 0$ et $P_a \leqq 0$.

La sextique C_1 est singulière (²) *d'ordre $3(m+n)$.*

4. Examinons spécialement le cas $m = 1$.

Les congruences de droites d'ordre 1 peuvent se partager en trois types :

(¹) L'ordre d'une congruence de courbe est le nombre de courbes passant par un point, et la classe le nombre de courbes ayant une bisécante fixe.

(²) Une courbe est singulière d'ordre p si les courbes de la congruence passant par un point de cette courbe engendrent une surface d'ordre p.

a. Gerbe de rayons (classe zéro).

b. Système des bisécantes de la cubique gauche (classe 3).

c. Ensemble des droites s'appuyant sur une courbe d'ordre n et sur une droite $(n-1)$ *fois sécante de la courbe* (classe n).

On obtient trois types de congruences de cubiques gauches, à savoir :

a. Congruence des cubiques gauches passant par un point fixe et s'appuyant huit fois sur une sextique gauche de genre 3 singulière d'ordre 3. Cette congruence est aussi de la première classe.

MM. Stuyvaert [1] et Veneroni [2] ont rencontré ce type, et M. Stuyvaert [3] l'a étudié.

b. Congruence des cubiques gauches possédant une sextique de genre 3 *octosingulière d'ordre* 12 *et une courbe unicursale d'ordre* 9 *bisingulière d'ordre* 6 *et s'appuyant vingt-quatre fois sur la sextique singulière. La congruence est de la dixième classe.*

c. Congruence formée pour les cubiques gauches possédant une sextique de genre 3 *octosingulière d'ordre* $3(1+n)$, *une cubique gauche singulière d'ordre* $3n$ *s'appuyant huit fois sur la sextique et une courbe d'ordre* $3n$ *singulière d'ordre* 3 *s'ap-*

---

(1) *Loc. cit.* — *Congruences linéaires de cubiques gauches* (*Comptes rendus*, novembre 1905). — *Congruences de triangles et autres variétés algébriques annulant des matrices* (*Journal de Crelle*, 1907, Band 132, p. 132).

(2) *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe* (*Rendiconti di Palermo*, t. XVI, 1902).

(3) *Une congruence linéaire de cubiques gauches* (*Bul. de l'Acad. R. de Belgique*, 1907).

puyant $8n$ *fois sur la sextique et* $(n-1)$ *fois sur la cubique. La classe est égale à* $3(1+n)$.

Pour $n=1$ on retrouve une congruence de M. Stuyvaert (1).

L'étude de ces congruences ne présente plus aucune difficulté (2).

[R1b]

THEORÈME SUR LA ROTATION D'UNE PLAQUE PLANE DANS SON PLAN;

PAR M. A. ROGOFF.

Si une plaque plane, de forme quelconque, se meut dans un plan fixe, en tournant autour d'un point fixe O du plan, les quantités de mouvement des divers points de la plaque forment un système de vecteurs équivalents à un vecteur unique porté par une droite D *invariablement liée à la plaque.*

En effet, prenons un système d'axes rectangulaires Ox et Oy invariablement liés à la plaque, l'axe Ox étant la droite OG joignant l'origine fixe O au centre de gravité G; appelons M la masse totale de la plaque, ξ l'abscisse du centre de gravité. Soit ω la vitesse angulaire : un point m de la plaque, de coordonnées x et y, a une quantité de mouvement mv ayant pour pro-

(1) *Loc. cit.*

(2) Récemment, M. J. de Vries a étudié, au moyen d'un cas particulier de la transformation, la gerbe des cubiques gauches par cinq points (*Verslagen van de W. Ak.*, Amsterdam, 1908). L'article de M. de Vries m'a été aimablement communiqué par M. Stuyvaert, que j'avais mis au courant de mes recherches et qui a lui-même rencontré la transformation générale en poursuivant ses études sur les figures représentées par des matrices de forme.

jection sur les axes

$$X_k = -m\omega y, \qquad Y_k = m\omega x,$$

et pour moment par rapport à O

$$N_k = m\omega(x^2 + y^2).$$

La somme géométrique des quantités de mouvement est donc

$$X = \Sigma X_k = -\omega \Sigma m y = 0,$$
$$Y = \Sigma Y_k = \omega \Sigma m x = \omega M \xi,$$

et le moment résultant de ces quantités est

$$N = \Sigma N_k = \omega \Sigma m(x^2 + y^2) = \omega M k^2,$$

Mk^2 désignant le moment d'inertie de la plaque par rapport à O.

Le système de vecteurs, formé par les quantités de mouvement, est donc équivalent à un vecteur unique R de projection

$$X = 0, \qquad Y = \omega M \xi,$$

appliqué en un point x_0, y_0, dont on obtient le lieu en écrivant que le moment de R par rapport à O est N :

$$x_0 \omega M \xi = \omega M k^2,$$

ou

$$x_0 \xi = k^2. \tag{1}$$

Le vecteur R est donc dirigé suivant une droite fixe D perpendiculaire à OG, du même côté de O que G, rencontrant OG en un point O′, qui est lié à O par la même relation que l'axe d'oscillation à l'axe de suspension dans le pendule composé.

Réciproquement, si dans le glissement d'une plaque sur un plan fixe, les quantités de mouvement sont équivalentes à un vecteur unique porté par une droite invariablement liée à la plaque, le centre instantané de rotation est fixé sur la plaque, et la plaque tourne autour d'un point fixe.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1907). COMPOSITION SUR LA MÉCANIQUE.

SOLUTION PAR UN CORRESPONDANT.

Un corps de révolution Σ *homogène pesant, analogue à une toupie, repose par une pointe* S *sur un plan horizontal fixe* H; *la pointe glisse sans frottement sur ce plan; le système n'est assujetti à aucune autre liaison et il n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur.*

On désigne par G *le centre de gravité de* Σ *et par* l *la distance* SG; *on définit le mouvement du corps par la variation des angles d'Euler* θ, ψ, φ *qui sont respectivement l'angle de* SG *avec la verticale ascendante, l'angle de précession et l'angle de rotation propre; on désigne par* r, q, p *les composantes de la rotation instantanée suivant l'axe, l'horizontale perpendiculaire à l'axe et une perpendiculaire commune à ces deux droites, par* μ *et* μ' *les moments de rotation par rapport à l'axe et à la verticale du point* G.

1° *Écrire les équations du mouvement de* Σ. *En supposant qu'au début du mouvement la dérivée de* θ *par rapport au temps est nulle, à quelle condition doivent satisfaire les données initiales pour que* θ *conserve indéfiniment une valeur constante?*

2° APPLICATION NUMÉRIQUE. — *On suppose que le corps* Σ *a toute sa masse concentrée sur une circonférence homogène dont le plan est perpendiculaire à l'axe; le centre* G *sur l'axe et le rayon égal à* 10^{cm}; *la distance* SG *ou* l *est égale à* 20^{cm} *et l'inten-*

sité g de la pesanteur est prise égale à 980 *C. G. S. La position initiale de l'axe* SG *est inclinée sur la verticale de l'angle* $\frac{\pi}{6}$, *et le mouvement initial est le mouvement résultant de deux rotations, l'une autour d'un axe vertical passant par* G *avec une vitesse angulaire correspondant à n tours par seconde, l'autre autour de l'axe* SG *avec une vitesse angulaire correspondant à* 50 *tours par seconde. On demande de calculer la valeur numérique qu'il faut attribuer à n pour que* θ *conserve indéfiniment la même valeur qu'à l'instant initial.*

3° *Le corps* Σ *et les données initiales sont supposés quelconques, tels cependant que le point* G *se déplace suivant une verticale et que la pointe* S *repose constamment sur le plan* H. *A un certain moment on approche de* Σ *une droite rigide* D *qu'on maintient fixe, et cette droite* D *est choquée par le corps* Σ *à la manière des corps élastiques; on suppose qu'au moment du choc la droite* D *est perpendiculaire au plan vertical contenant* SG, *et l'on désigne par c sa cote au-dessus du plan* H; *on l'écarte après le choc de façon que le mouvement ultérieur de* Σ *ne soit pas gêné.*

Si M_1 *et* M_2 *sont les mouvements du corps* Σ *avant et après le choc, démontrer que les limites entre lesquelles varie* θ *sont plus étroites dans* M_2 *que dans* M_1. *Cette conclusion subsisterait-elle encore dans le cas où l'élasticité des corps choquants serait imparfaite?*

4° *On suppose que l'élasticité est parfaite, et l'on donne le mouvement* M_1; *peut-on choisir l'angle* θ *que fait, au moment du choc, l'axe* SG *avec la verticale pour que cet angle reste ensuite constant pendant le mouvement* M_2? *Quelles devront être*

les autres circonstances du choc? Indiquer, en particulier, suivant quelles lignes pourra s'exercer la percussion produite par le choc au point de contact de D *et de* Σ, *et en déduire les positions qu'on peut attribuer à la droite* D.

5° *On considère dans ce qui suit le cas où le corps* Σ *comprend une tige infiniment mince dirigée suivant son axe et où le choc se fait en un point de cette ligne dans les conditions du* 4°; *montrer qu'il existe, en général, deux positions possibles* D′, D″ *de la droite* D, *et déterminer ces positions. En supposant qu'on ait effectué, lorsque* D *occupe la position* D′, *le calcul des percussions au moment du choc et des éléments du mouvement* M_2, *quelles modifications faudrait-il apporter aux résultats de ce calcul lorsqu'on fait occuper à la droite* D *l'autre position* D″?

6° *Comment doivent être choisies les circonstances du mouvement* M_1 *au moment du choc pour que l'une des positions* D′ *ou* D″ *soit dans le plan* H? *Montrer que, si l'on place* D *dans l'autre position, le choc ne produit aucune percussion sur la pointe* S. *La distribution des masses de* Σ *peut-elle être telle que cette circonstance ne se produise pour aucun mouvement* M_1?

7° *Dans les conditions générales énoncées au* 5°, *discuter le nombre et la position de celles des droites* D′ *ou* D″ *pour lesquelles le choc n'a pas pour effet de soulever la pointe* S; *examiner séparément le cas où, au moment du choc, l'axe du corps* Σ *dans le mouvement* M_1 *s'approche de la verticale, et le cas où il s'en éloigne.*

I. Désignons par $O\xi\eta\zeta$ un trièdre fixe dans l'espace,

le sommet de ce trièdre étant dans le plan horizontal H, et l'arête $O\zeta$ étant dirigée suivant la verticale ascendante. Désignons de même par $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ un deuxième trièdre parallèle au premier, l'arête $O_1\zeta_1$ passant constamment par le centre de gravité G, et le sommet O_1 étant la projection de ce centre sur le plan H; enfin désignons par $Gxyz$ un trièdre lié au corps, ayant pour sommet le point G, l'arête Gz ayant la même direction que l'axe de révolution SG.

D'après le théorème du mouvement du centre de gravité, le trièdre $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ est au repos, ou est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme; le mouvement du corps par rapport à ce trièdre est complètement défini par la variation, en fonction du temps, des angles d'Euler φ, θ, ψ, car la cote du point G est constamment égale à

$$\zeta = l\cos\theta,$$

et le mouvement de ce point G sur $O_1\zeta_1$ est déterminé par la variation de θ.

Avec les notations habituelles, et en désignant par μ et μ' les moments de rotation de Σ par rapport à Gz et à $O_1\xi_1$, le théorème du moment cinétique par rapport à l'une et à l'autre de ces droites donne les deux intégrales

$$Cr = Cr_0 = \mu,$$
$$A\psi'\sin^2\theta + \mu\cos\theta = \mu';$$

enfin le théorème des forces vives donne l'intégrale

$$M(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + A(p^2 - q^2) + Cr^2 = -2Mg\zeta - h_0,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$(1) \qquad M\zeta'^2 - A(\psi'^2\sin^2\theta - \theta'^2) = -2Mg\zeta - h.$$

Si l'on pose

$$\cos\theta = u, \qquad \zeta = lu,$$

et si l'on élimine ψ' entre la deuxième et la troisième des intégrales précédentes, on obtient pour déterminer u l'équation différentielle

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &[A + Ml^2(1-u^2)]u'^2 \\ &\quad = (h - 2Mglu)(1-u^2) - \frac{1}{A}(\mu' - \mu u)^2; \end{aligned}\right.$$

lorsque u est connu, ψ et φ sont déterminés par les équations

$$A(1-u^2)\psi' = \mu' - \mu u,$$
$$\varphi' = r_0 - u\psi'.$$

La discussion des circonstances du mouvement suivant les données initiales se ramène à l'étude des racines du polynome qui forme le second membre de l'équation (2), polynome que nous désignerons par $f(u)$; cette étude est classique, et nous n'examinerons que le cas particulier où θ garde une valeur constante θ_0 pendant le mouvement, la valeur initiale de θ' étant nulle; nous appellerons u_0 la valeur de $\cos\theta_0$.

La constante h est alors fournie par l'équation

$$f(u_0) = 0;$$

lorsque h est remplacée par la valeur ainsi trouvée, l'équation $f(u) = 0$ admet la racine u_0; pour que θ reste constant, il faut et il suffit que u_0 soit racine double, ou que $f'(u_0)$ soit nul, c'est-à-dire qu'on ait

$$-u_0(h - 2Mglu_0) - Mgl(1-u_0^2) - \frac{\mu}{A}(\mu' - \mu u_0) = 0.$$

Si nous remplaçons h par sa valeur, ce qui revient à éliminer $h - 2Mglu_0$ entre l'équation $f(u_0) = 0$ et la précédente, nous obtenons la relation suivante :

$$(3)\qquad (\mu' - \mu u_0)(\mu - \mu' u_0) - MglA(1-u_0^2)^2 = 0;$$

à la notation près, c'est la condition à laquelle doivent satisfaire les données θ_0, ψ'_0, φ'_0, qui, jointes à $\theta'_0 = 0$,

donnent un mouvement dans lequel θ reste constant; ces conditions sont du reste suffisantes; ψ et φ varient alors proportionnellement au temps.

II. *Application numérique.* — La vitesse angulaire du corps autour de Gz est égale à φ', et sa vitesse angulaire autour de $G\zeta_1$ est égale à ψ'; la vitesse instantanée de rotation, résultante des deux précédentes, a pour projection sur Gz à chaque instant la quantité $r = \varphi' = \psi' u$; il en résulte que μ et μ' ont les valeurs

$$\mu = C(\varphi' + \psi' u), \qquad \mu' = \mu u + A\psi'(1 - u^2).$$

Si nous nous plaçons dans le cas où u, ψ' et φ' gardent des valeurs constantes égales aux valeurs initiales, l'équation (3) doit être satisfaite; en y remplaçant μ et μ' par leurs valeurs, cette équation se décompose en $(1 - u_0^2)^2 = 0$ et

$$\psi'_0[C\varphi'_0 + (C - A)\psi'_0 u_0] - Mgl = 0;$$

c'est de cette dernière qu'on tirera ψ'_0 quand les autres quantités seront connues.

Dans le cas indiqué dans l'énoncé, on a

$$C = 10^2 M, \qquad A = \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} 10^2 M,$$

$$u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \varphi'_0 = 100\pi, \qquad \psi'_0 = 2n\pi,$$

et n est donné par l'équation

$$\pi^2 \sqrt{3} n^2 + 200\pi^2 n - 196 = 0;$$

ses deux racines sont

$$n_1 = 0{,}1013 \qquad \text{et} \qquad n_2 = -116{,}1520;$$

à la première correspond un mouvement de précession très lent dans le sens positif, à la seconde un mouve-

ment dans le sens négatif avec une vitesse du même ordre de grandeur que celle de la rotation propre.

III. Par hypothèse, les deux trièdres $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ et $O\xi\eta\zeta$ sont, avant le choc, constamment confondus; nous supposons qu'ils sont choisis de telle sorte qu'au moment du choc le plan $O\xi\zeta$ contienne l'axe Gz, ainsi que le point de contact de Σ avec la droite D; celle-ci est donc parallèle à $O\eta$.

Le choc va produire sur le corps Σ deux percussions; l'une P est appliquée au point de contact de Σ et de D; nous désignerons par Q ce point, par α et γ ses coordonnées dans le système $O\xi\eta\zeta$, et par X, Z les projections de la percussion sur $O\xi$ et $O\zeta$, sa projection sur $O\eta$ étant nulle; l'autre percussion P′ est appliquée au point de contact S de Σ et du plan H; nous désignerons sa composante verticale par Z'_1, les deux autres composantes étant nulles. Nous affecterons de l'indice 1 les données relatives au mouvement immédiatement avant le choc, et de l'indice 2 les mêmes données immédiatement après le choc.

Les composantes ξ', η' de la vitesse du point G sont nulles par hypothèse avant le choc, mais elles ne le sont pas forcément après le choc; le théorème du mouvement du centre de gravité fournit les équations

$$M\xi'_2 = X, \qquad M\eta'_2 = 0, \qquad M(\zeta'_2 - \zeta'_1) = Z + Z';$$

si nous supposons que la pointe S reste toujours sur le plan horizontal H, la dernière de ces équations peut être remplacée par

$$-Ml\sin\theta(\theta'_2 - \theta'_1) = Z + Z'.$$

Nous joindrons à ces trois relations : 1° celles qui résultent de la considération du moment cinétique par rapport à Gz et par rapport à $G\zeta_1$; elles montrent que

les constantes μ et μ' gardent la même valeur après le choc, ou bien que r, ψ' et φ' ne changent pas au moment du choc; 2° celle qui résulte du théorème des forces vives, elle donne la relation

$$\begin{aligned} &M(\xi_2'^2 + \zeta_2'^2) + A(\psi_2'^2 \sin^2\theta_2 + \theta_2'^2) + Cr_2^2 \\ &= M\xi_2'^2 + A(\psi_2'^2 \sin^2\theta_1 + \theta_2'^2) + Cr_1^2, \end{aligned}$$

le premier membre étant égal au second si l'élasticité est parfaite, et lui étant inférieur si elle est imparfaite.

Si nous nous reportons à l'équation (1), qui permet de calculer la constante h à l'aide des données du mouvement relatives à l'instant du choc, nous voyons que sa valeur h_2 après le choc est inférieure à sa valeur primitive h_1, car on a

$$h_2 = h_1 - M\xi_2'^2.$$

Si alors nous calculons le second membre $f(u)$ de l'équation (2) d'une part avant le choc, d'autre part après le choc, et si nous désignons par $f_1(u)$ et $f_2(u)$ les polynomes obtenus, nous avons

$$f_2(u) - f_1(u) = (h_2 - h_1)(1 - u^2).$$

Soit alors u_1 la valeur de $u = \cos\theta$ au moment du choc, soient v_1 et w_1 les racines de $f_1(u)$ qui comprennent u_1, et soient v_2 et w_2 les racines de $f_2(u)$ qui comprennent ce même nombre u_1; v_1 et w_1 sont les cosinus des angles entre lesquels varie θ dans le mouvement M_1, et, de la même manière, v_2 et w_2 sont les cosinus des angles entre lesquels varie θ dans le mouvement M_2. Le nombre u_1 rend positifs f_1 et f_2; les nombres v_1 et w_1 qui annulent f_1 rendent f_2 négatif, d'après l'égalité précédente et d'après la remarque que $h_2 - h_1$ est négatif; il en résulte qu'on a

$$v_1 < v_2 < u_1 < w_2 < w_1;$$

par suite, les limites entre lesquelles varie θ dans le mouvement M_2 sont plus étroites que dans le mouvement M_1, ce que nous voulions établir.

IV. Lorsque l'élasticité est parfaite, la demi-force vive du système est conservée, et les inégalités que nous avons écrites précédemment se changent en égalités; nous en déduisons, en supposant toujours que la pointe S reste dans le plan horizontal et en remplaçant ζ'_1 et ζ'_2 par leurs valeurs, l'égalité

$$M\xi'^2_2 + (A + Ml^2 \sin^2\theta)(\theta'^2_2 - \theta'^2_1) = 0.$$

Nous ne nous sommes pas servis jusqu'à présent de l'équation des moments par rapport à un axe perpendiculaire au plan $Gz\zeta$; nous allons utiliser celle qu'on obtient en prenant les moments par rapport à un axe passant par G et parallèle à $O\eta$; elle s'écrit

$$(\gamma - l\cos\theta_1)X - \alpha Z + lZ'\sin\theta_1 = A(\theta'_2 - \theta'_1).$$

Cela posé, pour que l'angle θ garde après le choc la valeur θ_1 qu'il a au moment du choc, il faut d'abord que $\cos\theta_1$ ou u_1 satisfasse, en même temps que μ et μ', à la relation analogue à (3), c'est-à-dire qu'on ait

$$(\mu' - \mu u_1)(\mu - \mu' u_1) - Mgl A(1 - u_1^2)^2 = 0;$$

il faut en outre que θ'_2 soit nul; ces conditions sont du reste suffisantes. Si nous transportons la condition $\theta'_2 = 0$ dans les équations relatives au choc, elles deviennent

$$X = M\xi'_2. \tag{4}$$

$$Z + Z' = Ml\sin\theta_1\theta'_1, \tag{5}$$

$$(\gamma - l\cos\theta_1)X - \alpha Z + lZ'\sin\theta_1 = -A\theta'_1, \tag{6}$$

$$M\xi'^2_2 - (A + Ml^2\sin^2\theta_1)\theta'^2_1 = 0. \tag{7}$$

A ces quatre équations, nous devons ajouter la relation qui exprime que les coordonnées α, γ du point Q

satisfont à l'équation de la méridienne de la surface Σ, telle qu'elle est fixée au moment du choc par la valeur u_1, et de plus la relation qui exprime que la percussion P est normale à cette méridienne; nous aurons ainsi six équations entre les sept variables θ'_1, ξ'_2, α, γ, X, Z, Z'; nous pourrons donc en général fixer arbitrairement l'une d'elles; nous choisirons θ'_1 et les autres se trouveront déterminées.

L'équation (7) donne d'abord ξ'_2, puis l'équation (4) donne X; en éliminant Z' entre (5) et (6), nous avons ensuite la relation

$$(\gamma - l\cos\theta_1)X - (\alpha + l\sin\theta_1)Z + (A + Ml^2\sin^2\theta_1)\theta'_1 = 0,$$

que nous pouvons écrire, en tenant compte de la valeur de X,

$$\left(\gamma - l\cos\theta_1 \pm \sqrt{\frac{A}{M} + l^2\sin^2\theta_1}\right)X - (\alpha + l\sin\theta_1)Z = 0.$$

Mais la droite suivant laquelle s'exerce la percussion P a pour équations

$$\eta = 0, \qquad \frac{\xi - \alpha}{X} = \frac{\zeta - \gamma}{Z};$$

la relation précédente exprime que ces équations sont satisfaites par les coordonnées

$$(8) \qquad \begin{cases} \xi = -l\sin\theta_1, \qquad \eta = 0, \\ \zeta = l\cos\theta_1 \mp \sqrt{\dfrac{A}{M} + l^2\sin^2\theta_1}; \end{cases}$$

par conséquent, la direction de la percussion P passe par l'un ou l'autre des deux points déterminés par les équations précédentes (8). Nous désignerons ces deux points par I et J, le premier correspondant au signe $+$ devant le radical entrant dans ζ; ils sont tous deux situés sur la verticale du point S, et symétriquement placés par rapport au plan horizontal passant par G;

si G_1 est le point où ce plan coupe la verticale du point S, et si r est le rayon de giration relatif à A, on portera sur SG_1, de part et d'autre de G_1, des segments égaux à $\sqrt{r^2 + \overline{GG_1}^2}$, et les extrémités de ces segments seront les points I et J.

Ces points étant ainsi trouvés, la solution de la question s'achève de la façon suivante : de chacun d'eux on abaisse des normales sur la méridienne de la surface, telle qu'elle est fixée dans le plan $O\xi\zeta$ par la valeur choisie pour θ_1 ; le pied de chacune de ces normales est le point de contact d'une droite D répondant à la question ; il y a en général un nombre limité de ces points, à moins que la méridienne ne comprenne un ou plusieurs arcs de cercle de centre I ou J. Lorsque α et γ sont ainsi déterminés, on calcule les autres quantités ξ'_2, X, Z, Z' par les équations

$$(9)\quad \begin{cases} \xi'_2 = -\overline{G_1 I}.\theta'_1, \qquad X = -M.\overline{G_1 I}.\theta'_1, \qquad Z = X\dfrac{\zeta-\gamma}{\xi-\alpha}, \\ Z' = M.\overline{G_1 G}.\theta'_1 - Z, \end{cases}$$

où ξ, ζ désignent les coordonnées de I, et par des équations analogues obtenues en remplaçant I par J ; les valeurs de ξ'_2 et de X relatives au point J sont opposées à celles qui se rapportent au point I.

V. Examinons le cas particulier où le corps Σ comprend une tige mince dirigée suivant GS : les positions D' et D'' de D s'obtiendront en abaissant de chacun des points I et J une perpendiculaire sur GS ; les pieds Q' et Q'' de ces perpendiculaires sont tels qu'on ait

$$SQ' = SI\cos\theta_1, \qquad SQ'' = SJ\cos\theta_1.$$

Le premier de ces points existe toujours, mais le second n'existe que si la cote du point J est positive,

c'est-à-dire si l'on a

$$(10) \qquad l^2 \cos 2\theta_1 > \frac{A}{M},$$

ou bien, en introduisant le rayon de giration $r = \sqrt{\frac{A}{M}}$, si l'on a

$$\cos 2\theta_1 > \frac{r^2}{l^2};$$

cette condition n'est jamais remplie si la répartition des masses de Σ est telle que r soit supérieur à l; dans ce cas, la position D'' ne peut exister pour aucun mouvement M_1.

Si le choc a lieu au pied de la perpendiculaire abaissée du point I sur SG, on a

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi'_2 &= -\sqrt{\frac{A}{M} + l^2 \sin^2\theta_1}\ \theta'_1, \\ X &= -M\sqrt{\frac{A}{M} + l^2 \sin^2\theta_1}\ \theta'_1, \\ Z &= M\sqrt{\frac{A}{M} + l^2 \sin^2\theta_1}\ \operatorname{tang}\theta_1\,\theta'_1, \\ Z' &= M\left(l\cos\theta_1 - \sqrt{\frac{A}{M} + l^2\sin^2\theta_1}\right)\operatorname{tang}\theta_1\,\theta'_1 \\ &= M\,\overline{SJ}\,\operatorname{tang}\theta_1\,\theta'_1; \end{aligned} \right.$$

si au contraire le choc a lieu au pied de la perpendiculaire abaissée de J sur SG, les valeurs ξ'_2, X, Z sont opposées aux précédentes et Z' a la valeur $M\,\overline{SI}\,\operatorname{tang}\theta_1\,\theta'_1$.

VI. Pour que le point de contact Q'' soit confondu avec la pointe S, il faut que J soit aussi confondu avec ce point, ou que l'on ait $l^2 \cos 2\theta_1 = \frac{A}{M} = r^2$, ce qui exige, comme nous l'avons dit, une répartition convenable des masses de Σ; si cela a lieu, on a

$$SI = 2SG_1 \qquad \text{et} \qquad SQ' = 2SG_1 \cos\theta_1 = 2l\cos^2\theta_1 = l - \frac{r^2}{l},$$

de sorte que le point Q′ est le centre de percussion conjugué de S. Ceci nous indique que si l'on donne à la droite D la position D′, la percussion est nulle sur la pointe S; il est facile du reste de le vérifier directement en calculant la valeur de Z′ au moyen des équations (11).

VII. Nous avons toujours supposé que la liaison à laquelle est soumise la pointe S est telle qu'elle reste dans le plan horizontal H; nous allons chercher ce qu'il advient si la liaison consiste en un simple appui de la pointe sur le plan, et n'empêche pas le corps de se soulever au-dessus du plan. Si la percussion Z′ est positive, la pointe reste appuyée sur le plan; dans le cas contraire, elle est soulevée; nous n'examinerons pas ce qui se passe ultérieurement.

De ce que nous avons dit précédemment, et en particulier des formules (11), nous pouvons déduire les résultats suivants :

Premier cas. — Les points I et J sont tous deux au-dessus de S, ce qui exige que l'inégalité (10) soit satisfaite; il existe deux positions de la droite D et pour chacune d'elles le signe de Z′ est celui de θ'_1; si donc θ'_1 est positif, les valeurs de Z′ sont positives; dans le cas contraire, elles sont négatives.

Deuxième cas. — L'inégalité (10) n'est pas satisfaite; le point I seul convient à la question; la valeur correspondante de Z′ a le signe contraire à celui de θ'_1, puisque SJ est négatif; si donc θ'_1 est positif, Z′ est négatif, et, si θ'_1 est négatif, Z′ est positif.

En résumé, si l'inégalité (10) est satisfaite, la question posée aura deux solutions lorsque θ'_1 sera positif et n'en aura pas lorsqu'il sera négatif; si l'inégalité (10)

n'est pas satisfaite, la question aura une solution lorsque θ'_1 sera négatif et n'en aura pas dans le cas contraire.

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Grenoble.

Épreuve théorique. — *En considérant le mouvement elliptique du Soleil par rapport à la Terre, développer suivant les puissances de l'excentricité :*

L'anomalie excentrique, le rayon vecteur;
L'anomalie vraie, la longitude;
L'équation du centre et l'équation du temps.

Épreuve pratique. — *Calcul de l'azimut du coucher d'une étoile et de la durée de sa présence au-dessus de l'horizon, en tenant compte de la réfraction.*

Données numériques :

$$\varphi = 38^\circ 41' 16'', \qquad \lambda = 45^\circ 11' 23''.$$

Réfraction à l'horizon :

$$\theta = 33' 47''.$$

(Novembre 1908.)

Lille.

Question de Cours. — *Correction de la réfraction astronomique.*

1° *Cas des couches horizontales.*
2° *Équation différentielle de la réfraction dans le cas général.*
3° *Hypothèse de Bouguer. Intégration.*
4° *Formule pratique.*

Problème. — 1° *Déterminer la longitude d'un lieu par une observation de hauteur du Soleil.*

On donne :

Latitude de la station.....	$43^\circ.19'.25'',6$
Hauteur du centre du Soleil.....	$41.25.17,6$
Déclinaison du Soleil..	$19.16.25,4$
Heure vraie de Paris.....	$3^h\ 7^m\ 18^s,5$

La hauteur du Soleil est affranchie de la réfraction et de la parallaxe, et l'observation a été faite après le passage au méridien.

2° *Quelle serait l'erreur commise sur la longitude si l'on avait commis une erreur de* 30″ *sur la hauteur du Soleil?*

(Novembre 1908.)

Question de Cours. — *Calcul de la position d'une planète sur son orbite conformément aux lois de Képler pour une époque quelconque. Éléments de l'orbite.*

1° *Établir l'équation de Képler*

$$u - e \sin u = nt.$$

2° *Expression du rayon vecteur et de l'anomalie vraie v en fonction de l'anomalie excentrique u.*

3° *Expression de l'anomalie vraie par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de e et des sinus des multiples de u.*

Problème. — *On demande de calculer la longitude* L *et la latitude géocentriques d'une planète ainsi que sa distance à la Terre, connaissant les coordonnées héliocentriques de la planète.*

Application :

Longitude.....	$l = 121^\circ\ 7'53'',8$
Latitude.....	$L = 3^\circ 22' 57'',4$
Rayon vecteur..	$r = 0,718\,542\,3$

A la même époque, la Terre a pour coordonnées héliocentriques :

Longitude.....	$l_1 = 298^\circ 20' 36'',5$
Rayon vecteur.....	$r_1 = 1,016\,232\,7$

(Juillet 1908.)

Marseille.

Question de Cours. — *Exposer la méthode d'Horrebow-Talcott pour la détermination de la latitude d'un lieu de la Terre.*

Problème. — *Démontrer que, en un lieu donné, une étoile quelconque, à son lever, se déplace en azimut avec une vitesse indépendante des coordonnées de l'étoile. Trouver cette vitesse.*

Solution.

Construisons le triangle ayant pour sommets le pôle, le zénith et l'horizon.

On a

$$\frac{\sin\tau}{1} = \frac{\sin A}{\cos\delta},$$

$$\sin A = \sin\tau\cos\delta,$$

$$(1) \qquad \cos A\,\frac{dA}{d\tau} = \cos\tau\cos\delta;$$

mais on a aussi

$$(2) \qquad \sin\delta = -\cos\varphi\cos A, \qquad \cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi},$$

$$(3) \qquad \begin{cases} 0 = \sin\delta\sin\varphi - \cos\delta\cos\varphi\cos\tau, \\ \cos\tau\cos\delta = -\dfrac{\sin\delta\sin\varphi}{\cos\varphi}; \end{cases}$$

portant $\cos A$, $\cos\tau\cos\delta$ dans (1), il vient

$$\frac{dA}{d\tau} = \sin\varphi,$$

ce qui démontre la proposition.

Épreuve pratique. — *La petite planète (91) Egine a pour demi-grand axe $a = 2{,}59076$, et pour excentricité $e = 0{,}106602$.*

Sachant qu'à une certaine époque l'anomalie vraie de cette planète est égale à 45°, on demande de calculer, pour cette époque, l'anomalie excentrique et le rayon vecteur.

On fera les calculs avec l'approximation des Tables à 5 décimales.

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Calcul des longitudes terrestres au moyen des occultations.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer le volume d'un tétraèdre* OABC, *connaissant les longueurs* a, b, c *des trois arêtes, qui aboutissent à un même sommet* O, *ainsi que les angles* α, β, γ *que ces arêtes font deux à deux.*

Données numériques :

$$a = 17^{m},246; \qquad \alpha = 75^{\circ}.27'.34'',7;$$
$$b = 12,723; \qquad \beta = 82.43.51,2;$$
$$c = 7,932; \qquad \gamma = 67.58.27,9.$$

(Novembre 1907.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Correction de parallaxe. — Définition de cette correction.*

Équations générales.

Correction de parallaxe dans les observations méridiennes. (*On laissera de côté le cas de la Lune.*)

II. PROBLÈME. — *Une planète et une comète de masses négligeables se meuvent dans un même plan passant par le Soleil, suivant les lois de Képler. La planète décrit un cercle de rayon a et la comète une parabole de distance périhélie* $\frac{a}{2}$. *A l'origine du temps, la comète passe à son périhélie et les anomalies des deux astres sont nulles à ce instant. On demande :*

1° *De calculer les époques où la comète traverse l'orbite de la planète et les positions de la planète à ces époques,*

2° *De décrire le mouvement de la comète, vue de la planète, pendant son passage à l'intérieur de l'orbite de cette planète. On calculera, en particulier, l'angle compris entre les rayons visuels apparents correspondant aux époques déterminées dans la première partie du problème.*

SOLUTION.

II. La question est sans difficulté, en utilisant les relations

$$v = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} t \qquad \text{(cercle)},$$

$$\frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{v}{2} + \operatorname{tang} \frac{v}{2} = \frac{2k}{a^{\frac{3}{2}}} t \qquad \text{(parabole)}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les coordonnées moyennes de l'étoile* γ *Aigle, à la date* 1800,0, *sont :*

Ascension droite.... $\alpha = 19^h 36^m 44^s,94$
Déclinaison..... $\delta = 10^\circ 8' 12'',7$

On demande les coordonnées moyennes de cette étoile, à la date 1855,0.

Les constantes de la précession sont, pour la date 1827,5 :

$$m = 3^s,07134 \qquad \text{(en temps)}.$$
$$n = 20'',5882 \qquad \text{(en arc)}.$$

On admettra que les nombres donnés sont approchés à une demi-unité près du dernier ordre décimal conservé et l'on fera les calculs avec l'approximation stricte que comportent les données.

On rappelle aux candidats que les effets annuels de la précession sur les coordonnées équatoriales d'un astre sont représentés par

$$m + n \operatorname{tang} \delta \sin \alpha \qquad \text{(en ascension droite)},$$
$$n \cos \alpha \qquad \text{(en déclinaison)}.$$

SOLUTION.

Les coordonnées moyennes à l'époque 1855,0 sont

$$\alpha = 19^h 39^m 21^s,66,$$
$$\delta = 10^\circ 0' 24'',5.$$

(Juin 1908.)

Montpellier.

Épreuve théorique. — *Déterminer les coordonnées géographiques à terre et en mer.*

Épreuve pratique. — *Résoudre un triangle sphérique dont les angles sont :*

$$A = 116^\circ 20' \ 2'';$$
$$B = \ 75^\circ \ 0' \ 52'';$$
$$C = \ 70^\circ \ 7';$$

vérifier les résultats obtenus, par l'emploi de l'analogie des sinus.

(Novembre 1908.)

Épreuve théorique. — *Les différentes méthodes pour la détermination de la parallaxe solaire.*

Épreuve pratique. — *Un voyageur à terre se propose de déterminer sa position au théodolite. Il applique d'abord la méthode des hauteurs correspondantes avec* β *des Gémeaux :*

$$Æ = 7^h 39^m 41^s, \qquad D = 28^\circ 14' 56'' B.$$

Lors de l'observation faite à l'est du méridien, le chronomètre réglé sur le temps sidéral de Paris marque $13^h 2^m 10^s$; *lors de l'observation symétrique, il marque* $14^h 41^m 50^s$. *On conclut de plus que l'azimut de l'étoile dans la seconde observation est*

$$A = 25^\circ 12' 42''.$$

Quelles sont les coordonnées géographiques de ce voyageur?

(Juillet 1908.)

Nancy.

Épreuve théorique. — *On considère trois axes de coordonnées ayant leur origine au centre* T *de la Terre :* T*z*, *parallèle à la direction* LS *qui va du centre de la Lune au centre du Soleil ;* T*y*, *mené perpendiculairement à* T*z*, *dans le plan* *z*TP *de* T*z* *et de l'axe* TP *de la Terre, mais de manière à faire un angle aigu avec* TP, P *étant le pôle*

boréal; Tx, *perpendiculaire au plan* yTz, *de manière que le trièdre* Txyz *présente la disposition directe.*

Soit un temps moyen de Paris voisin du milieu d'une éclipse de Soleil. Calculer pour cette époque :

1° *L'ascension droite* $\mathcal{A}$ *et la déclinaison* $\mathcal{D}$ *de la direction* Tz;

2° *Les coordonnées* x, y, z *du centre* L *de la Lune;*

3° *Les coordonnées* ξ, η, ζ *d'un lieu terrestre* M;

4° *Les demi-angles au sommet des cônes d'ombre et de pénombre, ainsi que les rayons de leurs traces sur le plan* xTy;

5° *Les rayons de leurs traces sur le plan parallèle au plan* xTy *mené par le lieu* M;

6° *Les valeurs des quatre dérivées* x', y', ξ', η' *prises par rapport au temps.*

Déduire de là l'heure approximative d'un contact des disques lunaire et solaire, ainsi que l'angle au pôle correspondant.

On connaît, pour l'époque considérée : les coordonnées équatoriales $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ *de la Lune et celles* $\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$ *du Soleil; les distances* r, r' *de ces deux astres à la Terre; l'angle horaire* H *de la direction* Tz *par rapport au premier méridien.*

On connaît d'ailleurs aussi les rayons linéaires R *et* R' *de la Lune et du Soleil, ainsi que les coordonnées géographiques du lieu* M *et sa distance* ρ *au centre de la Terre.*

Épreuve pratique. — *A Paris, le 28 juin 1908, le temps vrai à midi moyen est* $23^h 57^m 4^s,02$; *le lendemain il est* $23^h 56^m 51^s,73$.

Calculer quelle est la valeur de l'angle horaire du Soleil vrai par rapport au méridien de Nancy le 28 juin 1908 à $5^h 28^m 8^s$ *du soir (heure légale).*

Sachant en outre que la déclinaison du Soleil à ce dernier instant est à Nancy de 23° 17′ 17″, *calculer pour le même instant l'angle parallactique du Soleil vu de Nancy.*

Les coordonnées géographiques de Nancy sont :

$$L = 3^m 51^s, \qquad \varphi = +48° 41' 31''.$$

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Principe de la méthode des moindres carrés ; le justifier. Expliquer la pratique de la méthode ; indiquer un exemple.*

II. *Détermination des six éléments elliptiques d'une planète à l'aide de trois observations.*

(Octobre 1907.)

QUESTIONS.

2132. D'un point P quelconque du plan d'une ellipse de centre O on abaisse les quatre normales dont les pieds sont M_1, M_2, M_3, M_4. Si α_1, α_2, α_3, α_4 sont les angles que les normales font avec le grand axe, et β_1, β_2, β_3, β_4 les angles que les droites OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 font avec le même axe, on a

$$\begin{aligned} &(\operatorname{tang}\alpha_1 + \operatorname{tang}\alpha_2 + \operatorname{tang}\alpha_3 + \operatorname{tang}\alpha_4) \\ &\times (\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 + \cot\alpha_3 + \cot\alpha_4) \\ = &(\operatorname{tang}\beta_1 + \operatorname{tang}\beta_2 - \operatorname{tang}\beta_3 - \operatorname{tang}\beta_4) \\ &\times (\cot\beta_1 - \cot\beta_2 + \cot\beta_3 + \cot\beta_4) = 4. \end{aligned}$$

(E.-N. BARISIEN.)

2133. Deux cercles C et C′ sont bitangents à une ellipse E, le premier en A et B, le second en A′ et B′. Montrer que les tangentes issues de A au cercle C′ et les tangentes issues de A′ au cercle C ont même longueur. (E.-N. BARISIEN.)

ERRATA AUX QUESTIONS 2130 ET 2131

(1909, p. 248).

Question 2130. — A la deuxième ligne de l'énoncé, *lire :*

n étant un nombre entier et positif, égal à 1, 2 ou 3.

Question 2131. — Remplacer le dernier mot de l'énoncé *cercle*, par *ellipse*.

[C2j]

SUR CERTAINES QUADRATURES;

PAR M. G. FONTENÉ.

Dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales* (1908, p. 385), j'ai cherché à donner l'historique de diverses formules de cubature. Des remarques de M. d'Ocagne (1909, p. 50) ont ramené mon attention sur ce sujet.

I.

1. La formule *dite de Sarrus*,

$$V = \frac{h}{6}(B - B' - 4B''), \tag{1}$$

applicable aux volumes des segments à bases parallèles pour lesquels l'aire de la section parallèle aux bases est exprimée par une fonction du second degré de la cote du plan sécant,

$$S = az^2 - bz + c,$$

est, bien entendu, *une simple formule de quadrature;* elle donne la valeur d'une intégrale définie dont l'élément différentiel est

$$(ax^2 + bx - c)\,dx,$$

ou l'aire comprise entre l'axe des x, la parabole du second degré

$$y = ax^2 + bx + c$$

et deux ordonnées déterminées y_0 et y_2 :

$$S = \frac{h}{6}(y_0 - 4y_1 - y_2). \tag{1'}$$

2. Dans le *Traité d'Analyse infinitésimale* de MM. Rouché et Lévy, t. II, p. 312, la formule (1) est donnée sous le nom de *règle des trois niveaux* et attribuée à Képler : les auteurs n'indiquent pas l'Ouvrage de Képler où se trouve cette formule.

3. Pour une parabole cubique

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

Newton a donné la formule

$$S = \frac{h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3),$$

l'intervalle h étant partagé en trois parties égales.

Cotes, en reproduisant cette formule d'après Newton (*De Methodo differentiali Newtoniana*), observe qu'une formule analogue existe pour une parabole de degré quelconque

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots$$

l'intervalle h étant partagé en m parties égales; il donne le Tableau suivant :

$$(\alpha) \quad m = 1, \quad S = h\frac{y_0 + y_1}{2};$$

$$(\beta) \quad m = 2, \quad S = h\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6};$$

$$(\gamma) \quad m = 3, \quad S = h\frac{y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3}{8};$$

$$(\delta) \quad m = 4, \quad S = h\frac{7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4}{90};$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. *Catalan a remarqué que la formule* (β) *s'applique également au cas* $m = 3$ (*Nouvelles Annales*, 1857, p. 312). La formule *dite de Sarrus* est donc

applicable si l'on a

$$S = az^3 + bz^2 + cz + d.$$

Maleyx a étendu la remarque de Catalan : *la formule relative au cas $m = 2n$ est également applicable au cas $m = 2n + 1$* (*Nouvelles Annales*, 1880, p. 543).

M. d'Ocagne a retrouvé ce résultat.

5. Maleyx ne s'est pas borné au cas où l'intervalle h est partagé en parties égales : il s'est proposé d'employer le nombre minimum d'ordonnées, ou plutôt le nombre minimum de sections, car il considère la question du volume.

Pour $m = 2$ il faut au moins deux sections, et Maleyx donne la formule générale

$$V = h\frac{(X + \lambda Y)}{1 + \lambda},$$

X et Y étant les aires de deux sections faites par des plans parallèles aux bases, de part et d'autre de la section moyenne, à des distances du plan de cette section données par les formules

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{1} = \frac{h}{2\sqrt{3\lambda}};$$

il fait en particulier $\lambda = 1$. Si l'on fait $\lambda = 3$, ce qui donne

$$x = \frac{h}{2}, \qquad y = \frac{h}{6},$$

X est l'une des bases et l'on obtient la formule qui se trouve dans l'Ouvrage de M. Halsted : *Rational Geometry*, et dont M. Ch. Michel était parti pour retrouver la formule ci-dessus avec λ.

Pour $m = 3$, Maleyx donne une formule générale qui comprend la formule (γ) avec quatre sections, la formule (β) avec trois sections, enfin une formule avec deux sections seulement; cette formule est

$$V = h\frac{X + Y}{2},$$

X et Y étant les aires de deux sections faites par des plans parallèles aux bases, à la distance $\frac{h}{2\sqrt{3}}$ du plan de section moyenne; c'est la formule ci-dessus pour $\lambda = 1$.

6. La formule (1), en ce qui concerne le volume du *prismatoïde*, est due à Mascheroni. M. Haillecourt est peut-être le premier qui ait observé qu'elle s'applique au volume d'un segment à bases parallèles limité latéralement par une surface réglée quelconque : il démontre que l'aire de la section est exprimée par une fonction du second degré de la cote du plan sécant. Il donne l'exemple que j'ai cité à tort comme étant peut-être nouveau (p. 386). La Note de M. Haillecourt a paru, en 1868, dans la *Revue des Sociétés savantes;* une autre Note du même auteur sur le sujet qui nous occupe a paru, en 1876, dans le même recueil.

7. Maclaurin (*Traité des fluxions*, n° 848, 1742) a donné une formule d'approximation,

$$\frac{S}{h} = \frac{y_0 - y_m}{2(m-1)} + \frac{m(y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1})}{m^2 - 1},$$

qui coïncide, pour $m = 2$ et pour $m = 3$, avec les formules (β) et (γ).

La formule de quadrature de Thomas Simpson s'ob-

tient en appliquant la règle des trois niveaux à chaque groupe de trois ordonnées successives.

II.

8. La formule

$$V = B''h + P\frac{h}{3},$$

relative au volume du prismatoïde, appartient à Mascheroni; elle a été retrouvée par M. Koppe.

M. Haillecourt a considéré le cas où les polygones qui limitent les bases polygonales du prismatoïde sont remplacées par deux courbes, le solide étant limité latéralement par une surface *développable*. La lettre P représente donc l'aire enfermée dans une courbe qu'on doit supposer tracée dans un plan parallèle aux plans des deux premières, et qui possède cette propriété : M′ et M″ étant deux points correspondants des courbes données, le point correspondant M de la nouvelle courbe est tel que la tangente en M est parallèle aux tangentes en M′ et M″, et que le rayon de courbure en M est égal à la demi-différence des rayons de courbure en M′ et M″.

Note. — L'axiome de Cavalieri donne immédiatement ce résultat connu. Lorsqu'une droite glisse sur deux arêtes opposées d'un tétraèdre, en restant dans un plan parallèle à deux autres arêtes opposées, cette droite engendre une surface qui divise le tétraèdre en deux parties équivalentes. Cette remarque est à rapprocher de la formule

$$V = \frac{1}{6} AB \times CD \times \mu.$$

[O5iα]

SUR LES SURFACES DE MONGE ET SUR LA COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL DU CONCOURS D'AGRÉGATION (1908);

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Les *Nouvelles Annales* viennent de publier une solution de la Composition de Calcul différentiel et intégral d'Agrégation du dernier Concours. L'étude approfondie de ce problème et le désir de le mettre sous une forme canonique m'ont conduit aux résultats qui suivent. La division en parties n'a aucun rapport avec celle du problème. Les lecteurs, que l'Agrégation n'intéresse pas, n'ont qu'à ne pas lire la première et la cinquième partie.

PREMIÈRE PARTIE.

I. La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $f = 0$ ait un contact du second ordre avec son enveloppe est que les courbes $f = 0$, $\frac{df}{d\alpha} = 0$ aient même tangente au point (ξ, η). Puisque la tangente joue un rôle dans la question, considérons tangentiellement la courbe (C) : définissons-la comme enveloppe de la droite d'équation

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - \varpi = 0.$$

dans laquelle ϖ est une fonction de l'argument φ et du paramètre α.

Exprimons que les deux droites parallèles, qui correspondent aux valeurs α et $\alpha + d\alpha$ du paramètre,

coïncident aux infiniment petits près du troisième ordre

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

De ces relations résulte immédiatement la relation

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha \, \partial \varphi} = 0,$$

qui peut être substituée à la relation

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Les relations

$$(1) \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha \, \partial \varphi} = 0$$

expriment rigoureusement que la courbe (C) *a un contact du second ordre avec son enveloppe.*

Considérons, en effet, l'enveloppe de (C) comme enveloppe de la droite

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \Omega = 0.$$

Ω est la fonction de φ qui s'obtient en remplaçant, dans ϖ, le paramètre α par sa valeur en fonction de φ tirée de $\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0$. Des expressions des coordonnées du centre de courbure dans le système considéré, il résulte qu'il faut que $\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \varphi^2}$ et $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2}$ soient identiques, en tenant compte de $\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0$. Or, nous avons

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha \, \partial \varphi} \frac{d\alpha}{d\varphi} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha^2} \left(\frac{d\alpha}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} \frac{d^2 \alpha}{d\varphi^2};$$

et, en tenant compte de $\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0$,

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha \, \partial \varphi} \frac{d\alpha}{d\varphi}.$$

Cette dernière équation montre que les équations

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha \, \partial \varphi} = 0$$

expriment rigoureusement le contact du second ordre.

Il est d'ailleurs aisé de vérifier l'équivalence de ces équations et de celles de la méthode ponctuelle

$$f = 0, \qquad \frac{df}{d\alpha} = 0, \qquad J\left(f, \frac{df}{da}\right) = 0.$$

D'après leurs significations géométriques, en effet, ϖ et $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$ ont pour expressions

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad \varpi = x f'_x + y f'_y,$$
$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2} \, \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} = x f'_y - y f'_x.$$

Le calcul donne

$$(f_x^2 + f_y^2) \quad \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} J\left(f, \frac{df}{d\alpha}\right),$$
$$(f_x^2 + f_y^2) \, \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha \, \partial \varphi} = \varpi \quad J\left(f, \frac{df}{d\alpha}\right).$$

Ces deux équations expriment l'équivalence des résultats.

La condition de contact du second ordre entre la courbe (C) et son enveloppe est donc la compatibilité entre les équations

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha \, \partial \varphi} = 0,$$

c'est-à-dire la *condition d'existence d'une racine double pour l'équation en* φ

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0.$$

Par exemple, pour les épicycloïdes d'équation

$$\varpi = A \cos \omega(\varphi - \varphi_1),$$

dans laquelle A, ω, φ_1 sont des fonctions de α, il faut exprimer l'existence d'une racine double pour une équation du genre de celles que l'on rencontre dans la théorie de la Diffraction.

Il est encore commode de présenter le résultat sur une forme géométrique : *la condition est que la courbe enveloppe de la droite*

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha}$$

passe par l'origine des coordonnées.

Il y a une véritable correspondance entre les familles de courbes passant par l'origine et les familles de courbes qui admettent un contact du second ordre avec leur enveloppe.

L'emploi des coordonnées tangentielles offre donc un avantage : la condition est plus simple qu'en coordonnées ponctuelles et s'interprète plus élégamment. La seule objection qu'on puisse faire est que les courbes

$$\frac{df}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d^2 f}{d\alpha^2} = 0$$

disparaissent. Mais est-ce là un inconvénient ?

II. Par le choix de l'argument φ pour repérer la tangente, une seconde simplification doit se produire, puisque cet *argument est invariant dans la transformation par homothétie*. Soient ϖ_0 et ϖ les fonctions relatives aux courbes (C_0) et (C). ϖ est donné par la relation

$$\varpi = k\varpi_0 + a_0 \cos \varphi + b_0 \sin \varphi.$$

a_0, b_0 désignant les coordonnées du point O'. Exprimer que l'équation en φ

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = k' \varpi_0 - a'_0 \cos\varphi + b'_0 \sin\varphi = 0$$

a une racine double est identique à chercher l'enveloppe de la droite

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - \varpi_0 = 0.$$

après avoir posé

$$x = -\frac{a'_0}{k'}, \qquad y = -\frac{b'_0}{k'}.$$

D'où la règle : *Pour avoir la relation différentielle cherchée, il faut substituer respectivement* $-\frac{a'_0}{K'}$ *et* $-\frac{b'_0}{K'}$ *aux variables ponctuelles dans l'équation ponctuelle de* (C_0).

C'est là le résultat trouvé par le calcul, dans la méthode ponctuelle [1]. Pour la suite du n° II et pour le n° III je renvoie à la solution publiée.

IV. Le cas de l'espace est identique à celui du plan. *La condition de contact du second ordre d'une surface* (Σ) *avec son enveloppe est que la surface enveloppe du plan*

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi - z \sin\varphi = \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha}$$

passe par l'origine. La surface (Σ) est considérée comme enveloppe du plan

$$x \cos\varphi \cos\psi - y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi(\varphi, \psi).$$

---

[1] Le cas singulier où (C_0) admet un point d'inflexion ne *doit* pas intervenir en coordonnées tangentielles.

Pour le cas des surfaces (Σ) homothétiques à une surface (Σ_0),

$$\varpi = k\varpi_0 + a_0 \cos\varphi \cos\psi + b_0 \cos\varphi \sin\psi + c_0 \sin\varphi.$$

$-\frac{a_0}{K'}$, $-\frac{b_0}{K'}$, $-\frac{c_0}{K'}$ sont identiques aux coordonnées (x_0, y_0, z_0) du point M_0 de (Σ_0) homologue du point de contact de (Σ) avec son enveloppe. Si donc la représentation tangentielle de (Σ_0) est valable, M_0 décrit une courbe (ses coordonnées sont fonctions de α); ceci est contraire au fait que M_0 doit être quelconque sur (Σ_0). Examinons donc le cas où (Σ_0) est développable; φ et ψ ne sont pas indépendants. On retombe alors sur un résultat identique à celui de la méthode ponctuelle.

V. Soient OXY et oxy les axes fixes et les axes mobiles; a et b les coordonnées de l'origine mobile. Des formules de transformation

$$X = a - x\cos\theta - y\sin\theta, \qquad Y = b - x\sin\theta - y\cos\theta$$

on tire

$$\Omega = \varpi(\varphi) + a\cos(\varphi - \theta) + b\sin(\varphi - \theta).$$

L'argument Φ est ici $\varphi - \theta$:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} = \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\frac{d\theta}{d\alpha} + \frac{da}{d\alpha}\cos(\varphi - \theta) + \frac{db}{d\alpha}\sin(\varphi - \theta).$$

Introduisons les coordonnées u et v (par rapport aux axes mobiles) du centre instantané,

$$\frac{da}{d\theta} = u\sin\theta - v\cos\theta, \qquad \frac{db}{d\theta} = u\cos\theta - v\sin\theta.$$

Il faut que l'équation

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} = 0$$

ait une racine double: cette équation est, après suppression du facteur $\frac{d\theta}{d\alpha}$,

$$-u\sin\varphi + v\cos\varphi - \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} = 0;$$

elle représente la normale de (C_0) par rapport aux axes mobiles.

La roulette mobile coïncide donc avec la développée de (C_0).

C'est le résultat de la méthode ponctuelle et de la Géométrie. Quant à la *courbe base*, aucune condition ne lui est imposée. Cependant, *puisque nous raisonnons en tangentielles,* il y a lieu de se demander s'il n'y a pas de singularité dans le cas où cette base est une droite. *Dans le cas où la développée de* (C_0) *roule sur une droite, les courbes* (C) *passent par un point fixe et touchent en ce point une droite fixe.* Il n'y a donc pas contact du second ordre avec l'enveloppe dans ce cas singulier, qui n'est pas signalé dans l'énoncé [1].

DEUXIÈME PARTIE.

Nous venons de rencontrer un déplacement de figure plane que l'on n'envisage point en Cinématique, mais qu'il y a lieu de considérer : lorsqu'en effet une courbe (C) située dans un plan XOY reste en contact avec la droite fixe OX en un point fixe O, la construction ordinaire du centre instantané de rotation ne peut être appliquée. Le résultat trouvé plus haut nous apprend que le *centre instantané est le centre de courbure de* (C).

Pour démontrer directement cette propriété, il convient de se poser un problème intéressant et dont des

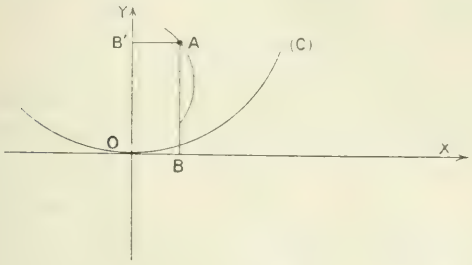
---

[1] « L'autre courbe pouvant être quelconque ».

cas particuliers et isolés ont fait l'objet de diverses questions ([1]).

Une courbe (C) *du plan xoy reste en contact avec la droite fixe* OX *au point fixe* O ; *un point* A *invariablement lié à cette courbe engendre une courbe*

Fig. 1.



(Γ). *Étudier la correspondance entre les courbes* (C) *et* (Γ).

Soit

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \varpi = 0$$

l'équation de la tangente en un point quelconque de la courbe (C) rapportée à des axes de son plan issus du point A. Les coordonnées de A par rapport aux axes (OX, OY) sont

$$y = \varpi, \qquad x = \frac{d\varpi}{d\varphi}.$$

Si (C) est donnée, l'équation de (Γ) s'obtiendra par élimination de φ entre ces équations. Si (Γ) est donnée par une équation

$$x = f(y),$$

l'équation de (C) sera

$$\varphi = \int \frac{d\varpi}{f(\varpi)} - \text{const.}$$

([1]) *N. A.*, 959, 973 ; *M.*, 457 ; *N. C.* de 1876, p. 377 et 483.

Pour avoir des cas particuliers intéressants, il suffit de prendre pour $\frac{1}{x}$ une dérivée d'une fonction connue de y. On peut ainsi traiter simplement les questions rappelées. J'en signalerai une nouvelle qui pourrait avoir des applications : en ce qui concerne, en effet, certains canaux, pour ouvrir les vannes des écluses, on fait passer une tige *curviligne,* présentant une inflexion, à travers une masse O trouée qui est fixée sur la rive ; la tige est articulée en un point A de la vanne : le point A décrivant un arc de circonférence, la forme à donner à la tige est donc celle d'un arc de la courbe (C) correspondant au cas où (Γ) est une circonférence. Le calcul montre qu'il y a trois cas à considérer selon les positions relatives du cercle (Γ) et de la droite OY. Un cas intéressant est le cas intermédiaire où (Γ) touche OY : la courbe (C) est alors ou bien inverse, par rapport au pôle A, d'une développante de circonférence de centre A, ou bien une courbe parallèle à cette inverse de développante. Cette courbe (C) est rectifiable : il en est ainsi, plus généralement, lorsque (Γ) est unicursale.

La détermination du centre de courbure peut être faite en partant du résultat trouvé pour le problème précédent. Nous connaissons la trajectoire (Γ) d'un point A de la figure mobile ; le centre instantané est donc à l'intersection de OY avec la normale en A à la courbe (Γ). Appliquant les résultats trouvés pour les expressions des coordonnées de A, on trouve que la normale à (Γ) en A rencontre OY au point

$$X = 0, \qquad Y = \varpi + \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2}.$$

Vu l'orientation de la courbe (C) par rapport aux

axes, le centre instantané est donc le centre de courbure de (C).

Aux points de (Γ) à tangentes parallèles à OX correspondent des inflexions pour (C); aux points d'incidence sur (Γ) des normales issues de O correspondent des points de rebroussement pour (C).

TROISIÈME PARTIE.

Il y a lieu de se demander si un déplacement analogue, dans le cas de l'espace, peut donner des résultats intéressants. Nous indiquons ici une généralisation curieuse.

Étant donnée une surface (S) assujettie à rester en contact avec un plan fixe en un point fixe O, il semble *a priori* que, puisque la surface dépend encore de trois paramètres indépendants, il n'existe aucun point A invariablement lié à (S) qui puisse engendrer une surface (Σ) : il existe un tel point lorsque la surface (S) est une *surface de Monge,* c'est-à-dire une surface trajectoire orthogonale de plans tangents à un cône [1].

Considérons, en effet, la surface (Σ) sur laquelle nous supposons rester un point A invariablement lié à une surface (S) assujettie à toucher en un point fixe O un plan fixe (P); soit Oz la normale à ce plan; lorsque (S), tout en restant en contact avec (P) en O, pivote autour de Oz, tout point invariablement lié à cette surface engendre une circonférence d'axe Oz :

---

[1] Monge a considéré des surfaces plus générales, ayant pour nappe de la développée une développable quelconque; nous ne considérons ici que le cas où cette développable est un cône de sommet à distance finie; nous écartons, par conséquent, les *surfaces moulures*. La dénomination de *surfaces de Monge*, dans le cas particulier que nous considérons, est celle de M. Goursat (*Équations aux dérivées partielles du second ordre,* t. I, p. 130).

la surface (Σ) est donc de révolution. Dire que A reste sur (Σ) revient à dire qu'il existe une relation entre les distances de A à la normale et au plan tangent en un point quelconque de S. Or, l'équation [1] donnée par Monge *exprime* précisément qu'une propriété caractéristique des surfaces de Monge est la suivante :

Il existe une relation entre les distances du sommet A *du cône au plan tangent et à la normale correspondante d'une surface de Monge.*

Le théorème que nous venons d'établir est donc le suivant :

Théorème. — *Pour qu'un point* A *invariablement lié à une surface* (S) *qui varie de toutes les manières possibles en restant tangente en un point fixe à un plan fixe engendre une surface* (Σ) (nécessairement de révolution), *il faut et il suffit que la surface* (S) *soit une surface de Monge; le point* A *est le sommet du cône-développée de cette surface de Monge.*

Dans le cas particulier où la surface de Monge dégénère en une surface de révolution, il existe une infinité de points A situés sur l'axe. Réciproquement, ce cas est le seul pour lequel *deux* points jouissent de la propriété du point A.

Cette propriété des surfaces de Monge les caractérise parmi les surfaces. Nous allons établir une seconde propriété qui caractérisera les *lignes de courbure*

---

[1] En appliquant la transformation de Legendre à l'équation des surfaces de Monge, on obtient celle qui a fait l'objet de la composition d'Analyse d'Agrégation de 1897. Ce problème se résout dès lors en quelques lignes. Cette remarque n'est pas faite dans la solution publiée dans les *Nouvelles Annales* (1902.)

sphériques parmi toutes les courbes qui sont tracées sur une surface de Monge.

En général, lorsqu'une surface quelconque (S) est assujettie à rester en contact avec un plan fixe (P) en un point fixe O de ce plan, le point de contact sur (S) devant rester sur une courbe (Γ) de cette surface, si cette courbe (Γ) est quelconque, un point A invariablement lié à la surface engendre une surface de révolution d'axe Oz; si cette courbe (Γ) est une courbe de contact de (S) avec une développable circonscrite à (S) et à une sphère de centre A, le point A engendre un plan.

Lorsqu'il s'agit d'une surface de Monge, une telle ligne est identique à une ligne de courbure sphérique de la surface. Donc :

Théorème. — *Lorsqu'une surface de Monge reste en contact avec un plan fixe* (P) *en un point fixe* O *de ce plan, et, lorsque le point de contact décrit sur la surface une ligne de courbure sphérique, le sommet du cône-développée décrit un parallèle de* (Σ).

La conséquence la plus importante de ces deux théorèmes est :

1° Qu'il existe une correspondance entre toute surface de révolution et une famille de surfaces de Monge;

2° Qu'il existe une correspondance entre les parallèles de la surface de révolution et les lignes de courbure sphériques de ces surfaces de Monge.

En particulier, aux cylindres de révolution correspondent les surfaces *classiques* dont les normales touchent des sphères; aux sphères de centre O correspondent des surfaces de Monge dégénérées tangentiellement en des courbes sphériques; aux cônes de révolution autour de Oz correspondent les surfaces de

Monge trajectoires sous un angle constant des droites issues du point A.

L'étude analytique de cette correspondance se fait aisément en considérant les surfaces de Monge en coordonnées de Bonnet. Considérées comme enveloppes du plan

$$X(x+y)+iY(y-x)+(xy-1)Z=z(1-xy),$$

les surfaces de Monge ont pour équation

$$(1+xy)^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=F(z);$$

les lignes de courbure sphérique sont définies par l'équation

$$z=\text{const.}$$

Remarque. — Pour réaliser mécaniquement la liaison qui consiste à faire passer une surface géométrique par un point, avec un plan tangent déterminé en ce point, il suffit de considérer une surface matérielle, limitée par deux surfaces parallèles, assujettie à passer entre deux sphères solides dont la plus courte distance est rigoureusement égale à l'épaisseur de la surface matérielle.

Il est encore possible d'utiliser, dans un corps solide, une cavité limitée par deux surfaces parallèles, et la distance maxima, égale à l'épaisseur de cette cavité, de deux sphères solides.

QUATRIÈME PARTIE.

Nous avons introduit une propriété caractéristique des surfaces de Monge; elle conduit à d'autres résultats très intéressants relatifs à ces surfaces.

La polaire réciproque, par rapport à toute sphère de centre A, d'une surface de Monge est une surface de

Monge. L'inverse, par rapport à toute sphère de centre A, d'une surface de Monge est une surface de Monge. La polaire, relativement au point A d'une surface de Monge, est une surface de Monge.

Ces propriétés ont pour analogues, dans le cas du plan, celles de la spirale logarithmique. Il y a donc lieu d'examiner si d'autres propriétés de la courbe s'étendent aux surfaces, et d'en déduire que les *surfaces de Monge se présentent comme une généralisation de la spirale logarithmique.*

La spirale logarithmique est sa propre polaire réciproque par rapport à toute hyperbole équilatère qui a son centre au pôle de la spirale et qui lui est tangente [1].

Ce théorème se généralise ainsi : *La polaire réciproque, par rapport à la quadrique*

$$\pm X^2 \pm Y^2 \pm Z^2 - 1 = 0$$

de centre A, *d'une surface de Monge est une surface de Monge.*

Prenons, en effet, pour axes coordonnés $Axyz$ les axes de symétrie de la quadrique; soient (x, y, z, p, q) et (X, Y, Z, P, Q) deux éléments de contact indépendants; le calcul donne

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1 - P^2 - Q^2}{(PX + QY - Z)^2},$$

$$X^2 - Y^2 + Z^2 = \frac{1 - p^2 - q^2}{(px - qy - z)^2};$$

il en résulte l'invariance de l'équation aux dérivées partielles du second ordre des surfaces de Monge

$$\frac{D\left[x^2 - y^2 - z^2, \frac{(px + qy - z)^2}{1 + p^2 + q^2}\right]}{D(x, y)} = 0.$$

---

[1] Klein, Lie, *B. D.* de 1872.

Le théorème relatif à la développée de la spirale logarithmique est généralisé en considérant la nappe de la développée (autre que le cône) d'une surface de Monge : *cette nappe est une surface de Monge*. La considération de la congruence des normales d'une surface de Monge, dans ses relations avec la surface de Monge développée de la précédente, conduit à des résultats intéressants.

Soient une surface (Π) *quelconque*, O un point fixe de l'espace, OM le rayon aboutissant à un point quelconque M de (Π), MP la projection du rayon sur le plan tangent en M à (Π); nous donnerons, pour abréger, le nom de *vibration* à la droite MP. Cette dénomination est justifiée par le fait que, lorsque (Π) est la *surface d'onde de Fresnel*, la droite MP, projection du *rayon physique* OM sur le plan de l'onde correspondante, porte la vibration lumineuse ou le déplacement électrique (*dans la théorie de Fresnel*) [1].

Déterminons la surface (Π) par la condition que la *congruence des vibrations soit une congruence de normales*. Prenons une surface (Π) *non développable* et, sur elle, considérons l'∞^1 de géodésiques dont les tangentes constituent la congruence de normales : l'une quelconque de ces géodésiques est telle que sa tangente, sa normale principale et le rayon OM sont dans un même plan; elle est dès lors plane et passe par O : *la surface* (Π) *est une surface de Monge* dont le pôle A coïncide avec O. *La congruence des vibrations est celle des normales à une famille de surfaces parallèles qui sont toutes des surfaces de Monge.*

Un autre cas à considérer est celui où la surface (Π)

---

[1] *Cf.*, par exemple, le *Cours de Physique* de M. H. Bouasse, t. V, *Électroptique, Ondes hertziennes*, Chap. V.

dégénère tangentiellement en une courbe. *Dans le cas d'une courbe sphérique, la congruence des vibrations est une congruence de normales.*

L'une des surfaces trajectoires orthogonales est inverse par rapport à O *d'une surface développable.* Dans le cas des courbes sphériques, en effet, les rayons sont des normales à la courbe; ils fournissent une solution du problème des développées pour cette courbe; si, par conséquent, nous considérons les normales perpendiculaires aux plans tangents passant par O (ce sont des vibrations particulières), ces normales engendrent une surface développable dont l'inverse est trajectoire orthogonale des vibrations.

Interprétons physiquement cette propriété; supposons la courbe sphérique fermée et n'admettant pas de singularité. Nous pouvons alors la considérer comme le siège d'un courant, et, si nous disposons en O un pôle d'aimant, la force électromagnétique exercée par O sur l'élément M a pour droite d'action la normale à la courbe et au plan tangent en M mené par O. Donc :

Dans le cas d'une courbe sphérique fermée, sans singularité, parcourue par un courant, si l'on dispose un pôle d'aimant au centre de la sphère, les droites d'action des forces électromagnétiques exercées sur les éléments du circuit sont tangentes à une développée de la courbe.

La réciproque est exacte et la propriété caractérise les courbes sphériques.

Signalons, pour terminer, une dernière propriété caractéristique des surfaces de Monge, qui résulte aussi de la définition féconde que nous avons introduite.

La transformation par polaires réciproques par rap-

port à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$$

fait correspondre à un élément de contact issu d'un point M un élément de contact issu d'un point m. *Déterminons une surface à laquelle appartienne l'élément de contact m par la condition que la congruence des droites* Mm *est une congruence de normales* (¹).

Soient (x, y, z, p, q), (X, Y, Z, P, Q) les éléments m et M.

En posant

$$U = \overline{Mm},$$

et en considérant le point de coordonnées

$$\xi = x + \frac{\lambda}{U}(x - X),$$

$$\eta = y - \frac{\lambda}{U}(y - Y),$$

$$\zeta = z - \frac{\lambda}{U}(z - Z),$$

la condition qui exprime que ce point engendre une surface normale à la droite Mm est

$$2U\,d\lambda + d(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

$U\,d\lambda$ doit être une différentielle exacte; il en résulte qu'il doit exister une relation entre $\overline{OM}$ et $\overline{om}$. L'équation des surfaces cherchées est donc une équation de Monge et d'Ampère, admettant pour intégrale intermédiaire du premier ordre

$$X^2 - Y^2 + Z^2 = F(x^2 + y^2 + z^2)$$

(¹) *Cf.* la Note de M. J. Haag, *Sur les surfaces de Monge*, insérée dans les *Nouvelles Annales* de février 1908.

ou

$$(px + qy - z)^2 = \frac{1 + p^2 + q^2}{F(x^2 + y^2 + z^2)};$$

les surfaces (M) *et* (*m*) *sont donc des surfaces de Monge.*

CINQUIÈME PARTIE.

La condition trouvée au 1° du problème d'Agrégation est laissée invariante par le groupe des transformations de contact

$$\Omega = F(\varpi), \qquad \Phi = \varphi;$$

F est une fonction arbitraire dans laquelle α ne figure point. Cette remarque permet de simplifier les calculs par un choix convenable de la fonction F : c'est le cas des épicycloïdes citées plus haut, lorsque A ne dépend pas de α.

La remarque analogue doit être faite pour le cas de l'espace : la condition de contact du second ordre des surfaces (Σ) avec leur enveloppe est laissée invariante par le groupe

$$\Omega = F(\varpi), \qquad \Phi = \varphi, \qquad \Psi = \psi.$$

Ces transformations de contact, dont des cas particuliers sont intimement liés à d'autres transformations classiques, jouent un rôle considérable dans la théorie des surfaces de Monge qu'*elles transforment les unes dans les autres* (1) : c'est ainsi que les transformations

$$\Omega = \sin k\varpi$$

---

(1) L'équation des surfaces de Monge (en coordonnées de Bonnet)

$$q^2 r - p^2 t = 2s \frac{px - qy}{1 + xy}$$

est laissée invariante. Plus généralement, les seules équations de

transforment les surfaces dont les normales touchent une sphère en des courbes sphériques.

[N° 3a]

SUR UN COMPLEXE BILINÉAIRE DE CONIQUES;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

1. J'ai démontré récemment le théorème suivant (¹) :

Tout complexe bilinéaire de coniques est engendré pour l'intersection des éléments de deux variétés en correspondance birationnelle ; l'une de ces variétés est constituée par les plans de l'espace, l'autre par une triple infinité de quadriques appartenant à un ∞^5-système linéaire.

Soient Σ un complexe engendré de cette manière et V la variété de quadriques employée. Puisque V est unicursale, on peut établir entre cette variété et un ∞^3-système linéaire V′ de quadriques une correspondance birationnelle. Dès lors, à une conique du com-

---

Monge et d'Ampère laissées invariantes sont de la forme

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

dans laquelle. 1° H, K, L ne contiennent pas z, sont homogènes de même degré en p et q, et vérifient l'identité

$$Hp^2 + 2Kpq + Lq^2 = 0;$$

2° M est nul, ou, s'il n'est pas nul, ne contient pas z, est homogène en p et q et de degré supérieur d'une unité à celui de H, K, L. De nombreuses équations connues rentrent dans cette catégorie.

(¹) *Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique : Classe des Sciences*, 1908, p. 597-601, 812-814).

plexe Σ correspondra une et généralement une seule conique du complexe Σ' engendré au moyen de V', et *vice versa;* donc :

Tout complexe bilinéaire de coniques est birationnellement équivalent au complexe engendré par l'intersection des plans de l'espace et des quadriques d'un ∞^3-système linéaire en correspondance birationnelle.

Dans cette Note, je vais étudier le complexe engendré au moyen d'un ∞^3-système linéaire de quadriques, lorsque la correspondance birationnelle qui lie ce système à l'espace planaire est une collinéation qui fait correspondre à une quadrique un plan, à un faisceau et à une gerbe de quadriques respectivement un faisceau et une gerbe de plans.

2. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées courantes de l'espace,

$$(1) \qquad \lambda_1 a1_x^2 + \lambda_2 a2_x^2 + \lambda_3 a3_x^2 + \lambda_4 a4_x^2 = 0$$

le système linéaire triplement infini de quadriques, $a1_x^2, \ldots, a4_x^2$ étant les premiers membres des équations de quatre quadriques linéairement indépendantes.

Soit

$$(2) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

l'équation d'un plan quelconque de l'espace.

Les équations de la collinéation peuvent s'écrire

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = u_1 : u_2 : u_3 : u_4.$$

de sorte que les équations d'une conique quelconque du complexe peuvent s'écrire

$$(3) \qquad u_1 a1_x^2 + u_2 a2_x^2 + u_3 a3_x^2 + u_4 a4_x^2 = 0.$$

$$(2) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

u_1, u_2, u_3, u_4 étant quatre paramètres variables homogènes.

3. Les coniques du complexe dont les plans forment un faisceau (et, par conséquent, les quadriques qui les marquent sur ces plans forment aussi un faisceau) engendrent une surface cubique dont l'équation se construit facilement.

Soit

$$v_x - \mu w_x = 0$$

l'équation d'un plan quelconque du faisceau. La quadrique (3) qui correspond à ce plan a pour équation

$$\sum_{i=1}^{4} v_i a i_x^2 - \mu \sum_{i=1}^{4} w_i a i_x^2 = 0.$$

En éliminant le paramètre μ entre ces deux dernières équations, on trouve que la surface cubique est représentée par l'évanouissement du déterminant

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{4} v_i a i_x^2 & \sum_{i=1}^{4} w_i a i_x^2 \\ v_x & w_x \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire en fonction de coordonnées plückériennes de l'axe du faisceau des plans des coniques de la surface. Si $p_{12}, \ldots, p_{34}$ sont les coordonnées plückériennes de cette droite, on trouve

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} p_{ij} \begin{vmatrix} a i_x^2 & a j_x^2 \\ x_i & x_j \end{vmatrix} = 0.$$

4. La condition pour qu'une conique du complexe passe par un point fixe s'écrit

$$\sum_{i=1}^{4} u_i a i_x^2 = 0, \qquad u_5 = 0.$$

Ces coniques engendrent une surface dont l'équation s'obtient en éliminant les u entre les deux équations précédentes et les équations (2) et (3).

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a1_y^2 & a2_y^2 & a3_y^2 & a4_y^2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ a1_x^2 & a2_x^2 & a3_x^2 & a4_x^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les dérivées premières de l'équation (6) s'annulent pour $x = y$; donc :

Les coniques d'un complexe bilinéaire passant par un point fixe engendrent une surface cubique possédant un point double au point choisi.

L'équation (6) peut se mettre sous la forme (5) en posant

$$\rho p_{ij} = \begin{vmatrix} ai_y^2 & aj_y^2 \\ y_i & y_j \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. On en conclut que les plans des coniques passant par un point fixe passent par une droite issue du point (ce qui est la définition même de la classe) et que *cette droite décrit un complexe cubique.*

5. Les coniques du complexe dont les plans passent par un point fixe (y) engendrent une congruence bilinéaire. Cette congruence a été étudiée par M. Montesano [1] et rencontrée plus tard par M. Veneroni [2] comme seul type de congruence bilinéaire de coniques.

Les équations de la congruence sont (2) et (3)

---

[1] *Su di un sistema lineare di coniche nello spazio* (*Atti di Torino*, t. XXVII, 1892).

[2] *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe* (*Rendiconti di Palermo*, t. XVI, 1902).

jointes à l'équation

$$u_y = 0.$$

On déduit de ces trois équations que la conique de la congruence passant par un point (x) a des paramètres (u) proportionnels aux déterminants tirés de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a1_x^2 & a2_x^2 & a3_x^2 & a4_x^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} \right\|.$$

En particulier, si le point x est un point singulier, c'est-à-dire un point par lequel passent ∞^1 coniques de la congruence, la matrice s'annule et représente une courbe gauche d'ordre 7 et de genre 5 [1] passant par le point y et rencontrant six fois toutes les coniques de la congruence.

6. Considérons une congruence de classe n contenue dans le complexe bilinéaire de coniques. Un conique de la congruence est unique dans le plan qui la contient, donc les plans de ces coniques enveloppent une surface de classe n. Les équations (4) et (6) étant du même type, la congruence est aussi d'ordre n; donc :

Une congruence de coniques contenue dans un complexe bilinéaire a son ordre et sa classe égaux.

Les coniques du complexe qui s'appuient sur une droite engendrent une congruence bicubique.

Une congruence de coniques de degré n contenue dans un complexe linéaire est représentée par les équations (2) et (3) jointes à l'équation

$$u_x^n = 0.$$

---

[1] Stuyvaert, *Cinq études de Géométrie analytique.* Gand, Van Gœthem, 1908.

7. Il y a ∞^2 coniques du complexe qui dégénèrent, leurs plans enveloppent une surface de la cinquième classe. On voit aisément que, pour qu'une conique du complexe dégénère, son plan doit toucher la quadrique correspondante; donc l'équation de la surface enveloppée sera

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{4} u_i a_{i1} & \dots & \dots & \sum_{i=1}^{4} u_i a_{i4} & u_1 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & u_2 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & u_3 \\ \sum_{i=1}^{4} u_i a_{i1} & \dots & \dots & \sum_{i=1}^{4} u_i a_{i4} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Note. — M. G. Humbert a considéré un complexe bilinéaire de coniques particulier [1]. Les équations de ce complexe étaient

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 = 0.$$
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0.$$

[R8c]

SUR LE MOUVEMENT D'UNE CHAINE PESANTE SUR UNE COURBE FIXE;

PAR M. A. MYLLER.

1. On trouve, dans le *Traité de Mécanique* de

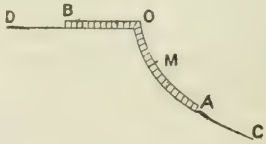
[1] *Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre* (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier LXIV, 1894).

M. P. Appell, l'étude du mouvement d'une chaîne pesante non homogène glissant sans frottement sur une courbe fixe.

L'équation de la courbe et la loi d'après laquelle la densité de la chaîne varie étant données, on détermine le mouvement à l'aide d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'étudier la question inverse : déterminer la loi de variation de la densité par la condition que la chaîne prenne un mouvement donné d'avance. La solution dépend de la résolution d'une équation intégrale qui est du type de M. Volterra ou de celui de M. Fredholm, selon les conditions données du problème.

2. Supposons une chaîne pesante de longueur a étendue sur une droite OD (*fig.* 1). Une extrémité A

Fig. 1.



de la chaîne quittant la droite, tombe en glissant le long d'une courbe donnée OC située dans le plan vertical passant par OD. Prenons un axe OZ vertical dirigé vers le bas; appelons s l'arc de la courbe OC compté depuis le point fixe O jusqu'au point de la courbe d'ordonnée z. On peut toujours écrire l'équation de la courbe sous la forme

$$z = \varphi(s).$$

Soit en particulier σ l'arc OA du point O jusqu'à l'extrémité A de la chaîne; la position de la chaîne est

connue dès qu'on connaît σ. Soit encore λ l'arc AM compté depuis l'extrémité A jusqu'au point M situé sur la chaîne. La coordonnée z du point M est alors

$$z = \varphi(\sigma - \lambda).$$

Désignons par $f(\lambda)$ la densité supposée connue d'un élément de la chaîne situé en M, ayant la longueur $d\lambda$ et étant à une distance λ du point A.

L'équation du mouvement s'obtient à l'aide du théorème des forces vives. Calculons le travail : la chaîne glissant d'une longueur $d\sigma$, le travail élémentaire du poids de l'élément $d\lambda$, de masse $f(\lambda)\,d\lambda$, est

$$g\,f(\lambda)\,d\lambda\,dz = g\,\varphi'(\sigma - \lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda\,d\sigma \qquad \left[\varphi'(s) = \frac{d\varphi}{ds}\right].$$

En observant que le travail du poids des éléments situés sur la droite OD est nul, on obtient comme expression de la somme de tous les travaux élémentaires

$$g\,d\sigma \int_0^\sigma \varphi'(\sigma - \lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda.$$

D'autre part, la force vive du système est

$$\sum mv^2 = \sum m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 \int_0^a f(\lambda)\,d\lambda = \mathrm{M}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2,$$

en désignant par M la masse totale de la chaîne. Cela établi, l'équation des forces vives donne

$$(1) \qquad \mathrm{M}\frac{d^2\sigma}{dt^2} = g\int_0^\sigma \varphi'(\sigma - \lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda.$$

C'est l'équation du mouvement dans le cas où la densité $f(\lambda)$ est connue [1].

---

[1] Paul Appell, *loc. cit.*

3. Laissons la fonction $f(\lambda)$ indéterminée et donnons-nous le mouvement. On pourrait le caractériser en se donnant σ comme fonction du temps ou encore en se donnant l'accélération $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ comme fonction connue de σ. Supposons donc qu'on ait

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = F(\sigma),$$

$F(\sigma)$ étant une fonction connue. L'équation (1) devient

$$(2) \qquad \frac{M}{g} F(\sigma) = \int_0^\sigma z'(\sigma - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda.$$

C'est une équation intégrale de première espèce du type de M. Volterra, $f(x)$ étant la fonction inconnue. Cette équation admettant toujours une solution, il est possible, par conséquent, de trouver une distribution de la densité $f(\lambda)$ telle que la chaîne prenne le mouvement donné.

Occupons-nous de quelques cas particuliers pour lesquels la solution $f(\lambda)$ de (2) se trouve facilement.

a. Supposons que la courbe OC soit la cycloïde

$$z = \frac{s^2}{8R}.$$

L'équation (2) devient

$$\frac{4RM}{g} F(\sigma) = \int_0^\sigma (\sigma - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda.$$

En dérivant deux fois on obtient la solution

$$f(\sigma) = \frac{4RM}{g} \frac{d^2 F(\sigma)}{d\sigma^2}.$$

b. La courbe AC est la parabole semi-cubique

$$z = k x^{\frac{2}{3}}.$$

dont l'équation s'écrit encore

$$z = ks^{\frac{2}{3}} - \frac{4k^3}{9}.$$

L'équation (2) devient

$$\frac{3M}{2gk} F(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{f(\lambda)}{\sqrt[3]{\sigma - \lambda}} d\lambda.$$

C'est une équation d'Abel [1] dont la solution est donnée par la formule

$$f(\sigma) = \frac{3\sqrt{3}}{M} \frac{M}{gk\pi} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \frac{F(\lambda)}{\sqrt[3]{(\sigma - \lambda)^2}} d\lambda.$$

c. La courbe AC est l'astroïde

$$x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

dont l'équation s'écrit encore

$$z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3a}} s^{\frac{3}{2}}.$$

L'équation (2) devient

$$\frac{\sqrt{3a}\, M}{\sqrt{2g}} F(\sigma) = \int_0^\sigma \sqrt{\sigma - \lambda}\, f(\lambda)\, d\lambda.$$

En dérivant on obtient

$$\frac{\sqrt{6a}\, M}{g} F'(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{f(\lambda)}{\sqrt{\sigma - \lambda}} d\lambda.$$

C'est une équation d'Abel dont la solution est

$$f(\sigma) = \frac{\sqrt{6a}\, M}{\pi g} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \frac{F'(\lambda)}{\sqrt{\sigma - \lambda}} d\lambda.$$

---

[1] *Journal für Mathematik*, t. I.

d. La courbe AC est la tractrice

$$x = \frac{a}{2} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - z^2}}{a - \sqrt{a^2 - z^2}} - \sqrt{a^2 - z^2},$$

dont l'équation s'écrit encore

$$z = a e^{\frac{s}{a}}.$$

L'équation (2) prend la forme

$$\frac{M}{g} F(\sigma) = \int_0^\sigma e^{\frac{\sigma - \lambda}{a}} f(\lambda)\, d\lambda,$$

qu'on écrit encore

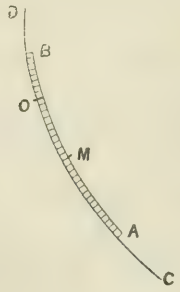
$$\frac{M}{g} F(\sigma) e^{-\frac{\sigma}{a}} = \int_0^\sigma e^{-\frac{\lambda}{a}} f(\lambda)\, d\lambda.$$

En dérivant on obtient la solution

$$f(\sigma) = \frac{M}{g} \left[F'(\sigma) - \frac{1}{a} F(\sigma) \right].$$

4. Tout autrement se présente le cas où la chaîne

Fig. 2.



est contrainte de glisser tout entière sur une courbe fixe CD. En désignant par σ l'arc AO, compté à partir

du point fixe O sur la courbe $z = \varphi(s)$, par λ l'arc AM compté depuis l'extrémité A jusqu'à un point M de la chaîne, par $f(\lambda)$ la densité de la chaîne en M et par a la longueur de la chaîne, on trouve pour la somme des travaux élémentaires l'expression

$$g\, d\sigma \int_0^a \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda.$$

Cette intégrale est étendue ici à tous les éléments de la chaîne, car il n'existe plus, comme dans le cas précédent, d'éléments dont le poids produit le travail nul. L'équation du mouvement est

$$M \frac{d^2\sigma}{dt^2} = g \int_0^a \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda.$$

Notre problème relatif à la détermination de la densité, à condition que la chaîne prenne un mouvement donné, est possible, par conséquent, seulement dans le cas où l'équation intégrale de première espèce du type de M. Fredholm

$$(3) \qquad \frac{M}{g} F(\sigma) = \int_0^a \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda$$

admet une solution. Or on sait que cela n'a pas lieu en général; l'existence de la solution dépend de la forme des fonctions $\varphi(s)$ et $F(s)$. On ne peut avoir des renseignements plus précis que dans des cas spéciaux.

Prenons comme exemple le mouvement sur la cycloïde

$$z = \frac{s^2}{8R}.$$

L'équation (3) devient

$$(4) \qquad \frac{8RM}{g} F(\sigma) = \int_0^a (\sigma - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda.$$

Le second membre de cette égalité étant, pour $f(\lambda)$ quelconque, une fonction linéaire de σ, il en est de même de $F(\sigma)$. Le problème posé n'est donc possible qu'à la condition

$$F(\sigma) = A\sigma + B.$$

Si cette condition est remplie, le problème admet une infinité de solutions. On le voit immédiatement en posant dans (4)

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n \qquad (n > 1),$$

et en cherchant à déterminer les coefficients par la condition que l'égalité (4) soit satisfaite. On obtient alors deux relations qui déterminent deux des coefficients en laissant les autres $n - 1$ arbitraires.

5. Revenons aux conditions du problème du n° 2 et proposons-nous de trouver une distribution de la densité telle que l'accélération du mouvement de la chaîne $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ soit proportionnelle à la densité de l'élément de la chaîne qui passe dans ce moment par le point O. On a alors

$$k\frac{d^2\sigma}{dt^2} = f(\sigma),$$

et l'équation (2) devient

$$f(\sigma) = k\frac{g}{M}\int_0^\sigma \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda.$$

C'est une équation intégrale homogène, du type de M. Volterra, qui n'admet pas, comme on le sait, de solution différente de zéro. Le problème posé est donc impossible.

6. Si l'on se pose le même problème dans les condi-

tions du n° 3 on obtient, pour déterminer $f(\sigma)$, l'équation homogène

$$(5) \qquad f(\sigma) = k\frac{g}{M}\int_0^a \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda.$$

Celle-ci étant du type de M. Fredholm, on sait qu'elle admet une solution réelle, différente de zéro, seulement dans le cas où le coefficient de proportionnalité k prend une des valeurs spéciales k_1, k_2, k_3, ... qu'on peut déterminer et dont le nombre peut varier du zéro à l'infini. Parmi les solutions correspondant aux diverses valeurs spéciales de λ, il faut choisir les positives; elles sont les seules qui peuvent représenter la densité. Le problème posé est donc possible s'il remplit ces conditions.

Prenons comme exemple le mouvement sur la tractrice

$$z = ae^{\frac{s}{a}}.$$

L'équation du problème est

$$f(\sigma) = k\frac{g}{M}\int_0^a e^{\frac{\sigma-\lambda}{a}} f(\lambda)\, d\lambda.$$

qui admet, comme on le constate immédiatement, pour la valeur spéciale $k = \frac{M}{ga}$, la solution

$$f(\sigma) = e^{\frac{\sigma}{a}}.$$

7. Avec les mêmes conditions qu'aux n°s 5 et 6, on peut se proposer encore de trouver une distribution de la densité telle que la différence entre l'accélération du mouvement et la densité $f(\sigma)$ de l'élément de la chaîne, qui passe en ce moment par le point O, varie d'après une loi donnée $F(\sigma)$. On est alors conduit respectivement aux équations intégrales de seconde

espèce non homogènes

$$(6)\quad \begin{cases} F(\sigma) + f(\sigma) - \dfrac{M}{g}\displaystyle\int_0^{\sigma} \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda = 0. \\ F(\sigma) + f(\sigma) - \dfrac{M}{g}\displaystyle\int_0^{a} \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda = 0. \end{cases}$$

On sait que ces équations admettent en général une solution. Il n'y a d'exception que pour la seconde des équations (6), qui, dans le cas où $k = 1$ serait une valeur spéciale de l'équation homogène (5), n'a pas de solution.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. E.-N. Barisien. — En relisant la question suivante : *Construire la courbe* $y = \sqrt{ax} + \sqrt{ax - x^2}$, proposée sous le n° 397 (*N. A. M.*, 1857, p. 390) et résolue (1857, p. 449), je me suis aperçu qu'elle était construite un peu *lourdement*.

La figure est fausse, en ce sens que la courbe semble avoir des points d'inflexion, alors qu'elle n'en possède pas. La courbe a aussi à l'origine un point de rebroussement qui n'est pas indiqué.

Si l'auteur de la solution avait eu l'idée de rendre l'équation proposée rationnelle, il aurait vu qu'elle devenait ainsi

$$(x^2 + y^2)^2 = 4axy^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r = 4a \cos\theta \sin^2\theta.$$

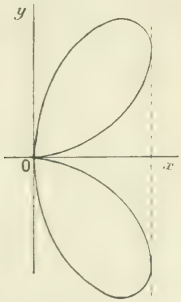
La courbe se construit alors bien facilement, et l'on

trouve presque immédiatement que son aire est $\frac{\pi a^2}{2}$.

On y arriverait avec l'équation proposée, mais *péniblement*, en y faisant

$$x = a \sin^2 \varphi.$$

Cette courbe est le *folium double* ou *bifolium* étudié par M. H. Brocard (*J. S. de Longchamps*, 1891).



Une conséquence qui résulte de l'identité de l'équation

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt{ax - x^2}.$$

avec le folium double, est que celui-ci a pour courbe diamétrale soit la parabole

$$y = \sqrt{ax}.$$

soit le cercle

$$y = \sqrt{ax - x^2}.$$

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

Épreuve théorique. — Première Question. — *Intégration de l'équation*

$$y = xf(y') + \varphi(y'),$$

où

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

et où $f(y')$ et $\varphi(y')$ sont deux fonctions données de y'.

Application. — *Une courbe plane* C *est rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *Par un point* M *variable sur cette courbe on mène une droite* MD *de coefficient angulaire égal et de signe contraire à celui de la tangente en* M *à la courbe. Déterminer la courbe* C *par la condition que* MD *reste tangente à une parabole donnée dont l'équation est*

$$y^2 = 2px.$$

On calculera le rayon de courbure en un point de la courbe C.

Deuxième Question. — *Énoncer et démontrer le théorème des résidus relatif à la valeur de l'intégrale* $\int f(z)\,dz$ *prise le long du périmètre limitant une aire pour laquelle* $f(z)$ *est analytique, uniforme et à points singuliers isolés.*

On montrera comment on peut, comme application de ce théorème, déterminer la valeur de l'intégrale de variable réelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-5)}.$$

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\theta}{16} + \frac{1}{\cos^2\theta}}\,d\theta.$$

(Juillet 1908.)

Caen.

Épreuve théorique. — 1° *On considère le système*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = A, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = B, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = C,$$

A, B, C *étant des fonctions connues de* x, y, z, *et l'on*

demande quelles sont les conditions d'intégrabilité du système. En les supposant satisfaites, fixer l'économie des conditions initiales qui suffisent pour déterminer une intégrale. Calculer cette intégrale en faisant

$$A = y^2 - z^2, \qquad B = z^2 + x^2, \qquad C = x^2 + y^2,$$

et en choisissant comme on voudra les fonctions arbitraires sans toutefois les réduire à de simples constantes.

2° *On considère un plan variable* P, *dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est*

$$18u^2x + y - 6uz - 3u^4 = 0,$$

u désignant un paramètre arbitraire. Montrer que l'arête de rebroussement de la développable enveloppe du plan P *est une hélice. Trouver les trajectoires orthogonales des génératrices de cette développable et reconnaître qu'elles sont situées dans des plans normaux aux génératrices du cylindre dont l'hélice précédente est une géodésique.*

(Un point de l'arête de rebroussement a pour coordonnées

$$x = u^2, \qquad y = 9u^4, \qquad z = 4u^3;$$

cette courbe coupe sous un angle de 45° un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la bissectrice de XOY.)

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x+1)^3(x^2-x+2)^2}.$$

(Juin 1908.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — I. *Les courbes planes constituant une famille de courbes parallèles ont, dans leur plan, une développée commune.*

Application aux courbes parallèles à la courbe

$$x = \psi(u)\cos u - \psi'(u)\sin u, \qquad y = \psi(u)\sin u + \psi'(u)\cos u.$$

II. *Lignes de courbure et rayons principaux de la sur-*

face engendrée par la courbe variable

$$x = \psi(u)\cos u - \psi'(u)\sin u + \varphi(z)\cos u,$$
$$y = \psi(u)\sin u - \psi'(u)\cos u + \varphi(z)\sin u,$$

quand le paramètre u varie.

Décrire le mode de génération de la surface par chacun des systèmes de lignes de courbure, et montrer que la surface est une surface moulure.

Épreuve pratique. — I. *Que devient l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

quand on change les variables x et y en deux autres z et θ liées aux premières par les équations

$$x = e^z \cos\theta, \qquad y = e^z \sin\theta?$$

Vérifier que, l'équation proposée étant vérifiée par

$$u = \varphi(x + iy) + \psi(x - iy),$$

où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires, l'équation transformée sera de même satisfaite par

$$u = \varphi_1(z - i\theta) + \psi_1(z - i\theta),$$

φ_1 *et* ψ_1 *étant aussi deux fonctions arbitraires.*

II. *Étude des courbes intégrales de l'équation*

$$(ax + by + c)\,dx + (ay - bx + c')\,dy = 0.$$

(Juillet 1908.)

Lille.

Question de Cours. — *Déterminants fonctionnels :*

1° *Définition;*

2° *Calcul du déterminant quand les fonctions données sont composées ou implicites ;*

3° *Condition nécessaire et suffisante pour que n fonctions*

de n variables indépendantes soient liées par une ou plusieurs relations ne contenant pas les variables.

Problème. — *Former toutes les équations de Riccati*

$$y' - ay^2 + by + c = 0,$$

admettant deux solutions y_1, y_2, telles que leur somme soit égale à leur produit. Trouver ces deux solutions particulières.

Ces équations dépendent de deux fonctions arbitraires u et v de x.

Montrer qu'on peut mettre les coefficients a, b, c sous la forme

$$a = \frac{1}{4}(v \sin^2 u + 2 \tang u),$$

$$b = -(v + \tang u),$$

$$c = v.$$

En mettant la fonction v sous une forme convenable, obtenir sans signe de quadrature la solution générale de l'équation de Riccati.

(Juillet 1908.)

Marseille.

Épreuve théorique. — *On suppose que l'ordonnée z d'un point quelconque d'une surface S ait pour projection sur la normale une longueur constante a.*

1° *Déterminer l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait cette surface et vérifier qu'on peut considérer S comme l'enveloppe d'une famille de surfaces représentées par l'équation*

$$x \cos u + y \sin u + f(u) = a \log \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

2° *Déterminer les lignes de courbure en prenant pour variables z et u;*

3° *Déterminer la fonction $f(u)$ de sorte que la surface contienne un cercle dont les équations*

$$z = a, \qquad x^2 - y^2 - 2\lambda x = 0$$

renferment une constante donnée λ.

4° *Lorsque $f(u)$ a été ainsi déterminée, ramener à une quadrature la recherche des lignes asymptotiques de la surface.*

SOLUTION.

L'équation aux dérivées partielles est

$$\frac{z}{\sqrt{1+p^2-q^2}} = a \qquad \text{ou} \qquad p^2+q^2 = \frac{z^2-a^2}{a^2}.$$

Si l'on pose

$$t = a \log \frac{z-\sqrt{z^2-a^2}}{a},$$

on est ramené à

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

dont l'intégrale générale est définie par l'équation

$$t = x\cos u - y\sin u - f(u)$$

et sa dérivée en u.

2° On trouve $du\,dz = 0$, ce qui donne les lignes de pente et les lignes de niveau.

3° On a

$$(f+\lambda\cos u)^2 + (y'-\lambda\sin u)^2 = 1,$$

d'où

$$f = \lambda[\cos u - \cos(u-u_0)].$$

4° La condition $f+f'' = 0$ conduit à

$$t\,du^2 - t''\,dz^2 = 0.$$

Remarque. — Si l'on choisit les surfaces satisfaisant à $qx-py=0$, on a des surfaces de révolution dont la méridienne est une chaînette ayant son axe de symétrie parallèle à Ox. En faisant subir à cette surface une translation suivant une direction parallèle au plan des xy, on a une intégrale complète dépendant des coordonnées x_0, y_0 du pied de l'axe de la surface de révolution.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les rayons de deux cercles de*

centre commun $z_0 = \frac{i}{2}$ *étant pris entre* $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{3}{2}$, *déterminer le développement en série de Laurent de la fonction*

$$u = \frac{1}{z^2 - 1},$$

dans la couronne formée par les deux cercles.

SOLUTION.

Si l'on écrit

$$u = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\left(z - \frac{i}{2}\right) - \frac{i}{2}} + \frac{1}{-\frac{3i}{2} - \left(z - \frac{i}{2}\right)}\right],$$

deux divisions, l'une ordonnée par rapport aux puissances positives de $z - \frac{i}{2}$, l'autre ordonnée par rapport aux puissances négatives, donnent immédiatement les deux parties de la série de Laurent sans qu'il soit nécessaire de former les intégrales définies qui servent de coefficients à ses termes.

(Juin 1908.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une surface a pour équation*

$$z = f(x) + \varphi(y).$$

Soient C, C′ *les centres de courbure principaux au point* M, A *le milieu de la droite* CC′. *Déterminer les fonctions* f *et* φ *de façon que la projection de* MA *sur* OZ *soit constante, pour tout point* M *de la surface.*

Calculer les rayons de courbure principaux en un point M, *pour les surfaces obtenues. Déterminer leurs lignes asymptotiques.*

Si α, β *sont les angles de la normale en* M *avec les axes* OX, OY, D *la projection de* CC′ *sur* OZ : *montrer que, parmi les surfaces déjà obtenues, il en existe pour lesquelles* D $\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta$ *est aussi constant.*

Appliquer les formules précédentes à ce cas particulier.

Épreuve pratique. — *Un paraboloïde et un cylindre sont représentés par les équations*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2,$$

a et b étant positifs, les axes rectangulaires.

Calculer l'aire de la portion de paraboloïde intérieure au cylindre, et le volume intérieur au cylindre compris entre le paraboloïde et le plan xOy.

On pourra effectuer le changement de variables

$$x = a\rho\cos\omega, \qquad y = b\rho\sin\omega,$$

(Juillet 1908.)

Rennes.

Épreuve théorique. — I. *On donne le système d'équations différentielles*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - y\sqrt{1-k^2} &= \varphi(t), \\ \frac{dy}{dt} + x\sqrt{1-k^2} - kz &= 0, \\ \frac{dz}{dt} - ky &= 0, \end{aligned}$$

où k désigne une constante positive plus petite que un *et $\varphi(t)$ une fonction connue de t.*

1° *Si (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) sont deux systèmes de fonctions de t correspondant à deux solutions des équations sans second membre, la somme $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ reste constante, et l'on a une nouvelle solution, en posant*

$$x_3 = y_1z_2 - z_1x_2, \qquad y_3 = z_1x_2 - x_1z_2, \qquad z_3 = x_1y_2 - y_1x_2.$$

2° *Trouver trois solutions (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) des équations sans second membre, telles qu'on ait, pour $t = 0$,*

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1-k^2}, & x_2 &= 0, & x_3 &= -k, \\ y_1 &= 0, & y_2 &= 1, & y_3 &= 0, \\ z_1 &= k, & z_2 &= 0, & z_3 &= \sqrt{1-k^2}. \end{aligned}$$

3° *Indiquer les quadratures à effectuer pour avoir la solution générale des équations avec second membre.*

Achever le calcul en supposant

$$\varphi(t) = -a\sqrt{1-k^2}\sin(kt) \qquad (a \text{ constant}).$$

II. *On considère les courbes* (C) *dont la tangente en un point quelconque* M (x, y, z) *a pour paramètres directeurs* αx, βy, γz; *ces courbes sont solutions du système différentiel*

$$(1) \qquad \frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{\beta y} = \frac{dz}{\gamma z};$$

α, β, γ *sont des constantes et les axes rectangulaires.*

1° *Démontrer que les courbes* (C) *sont les trajectoires orthogonales d'une famille à un paramètre de surfaces du second degré*

$$F(x, y, z) = \text{const.}$$

2° *Les courbes* (C) *qui rencontrent une courbe directrice* (D) *engendrent une surface* (S). *Lorsque la directrice* (D) *est une droite, montrer que la surface* (S) *est réglée; déterminer les droites* (D) *pour lesquelles la surface est développable; caractériser ces droites et les arêtes de rebroussement.*

3° *Lorsque la directrice* (D) *est une ligne courbe, solution d'un système différentiel analogue à* (1),

$$(2) \qquad \frac{dx}{\alpha' x} = \frac{dy}{\beta' y} = \frac{dz}{\gamma' z},$$

La surface (S) *admet une deuxième génération analogue à celle de définition. Trouver les lignes asymptotiques. Montrer que chacune des familles d'asymptotiques est formée de trajectoires orthogonales d'une famille de quadriques, et montrer que la surface* (S) *est orthogonale à une infinité de familles de quadriques.*

Épreuve pratique. — I. *Calculer le moment d'inertie, par rapport à* Oz, *du cylindre droit, de hauteur* h, *ayant pour base, dans le plan* xOy, *le cercle*

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

II. *On considère une surface* (S) *définie par l'équation*

$$\frac{x^2+y^2}{x}=f(z),$$

puis le solide limité par cette surface et les plans $z=0$, $z=c$. *Indiquer quelles quadratures il suffira d'effectuer si l'on veut calculer pour ce solide :*

Le volume ;

Les coordonnées du centre de gravité ;

Le moment d'inertie par rapport à Oz.

Achever les calculs en supposant

$$f(z)=\sqrt{c^2-z^2}$$

et c constant.

Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces (S).

Montrer que les plans tangents en tous les points d'une section $z=$ const. *rencontrent l'axe des z au même point.*

(Juin 1908.)

QUESTION.

2134. Soient, dans un triangle ABC, I le centre du cercle inscrit, O celui du cercle circonscrit, I′ le symétrique de I par rapport à O. Démontrer les deux propriétés suivantes :

1° Les perpendiculaires à I′A, I′B, I′C élevées en A, B, C rencontrent BC, CA, AB en A′, B′, C′. Ces trois points sont en ligne droite.

2° Si l'on projette I′ en A″, B″, C″ sur BC, CA, AB, les droites AA″, BB″, CC″ concourent en un même point.

Les mêmes propriétés s'appliquent aux centres I_A, I_B, I_C des cercles exinscrits et à leurs symétriques I'_A, I'_B, I'_C par rapport à O. (E.-N. Barisien.)

[O¹5j]

SUR LES SURFACES DONT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES SE DÉTERMINENT PAR QUADRATURES

(SECONDE NOTE).

PAR M. A. BUHL.

1. Ce travail fait suite à celui que j'ai publié ici même en octobre 1908. J'avais d'abord uniquement en vue de résumer des conférences d'agrégation faites à Montpellier, et je pense que la lecture de ce qui suit peut être encore utile aux candidats; mais, à côté du point de vue pédagogique, j'ai trouvé dans le sujet plus d'intérêt que je n'en voyais d'abord, et je crois nouveaux certains de mes résultats.

L'étude des lignes asymptotiques des surfaces

$$\Phi(z) = a\theta + F(r) \tag{1}$$

a surtout été faite en particularisant la fonction Φ; c'est ainsi qu'on rattache facilement au type (1) les surfaces hélicoïdales et spirales. J'ai essayé inversement de particulariser F en conservant la généralité de Φ.

Bien qu'ayant maintenu le titre du premier article, j'ai rencontré des surfaces dont les asymptotiques dépendent d'équations différentielles non réductibles aux quadratures. C'est d'ailleurs le cas général pour les surfaces (1), et je ne fais qu'étudier des cas particuliers de réductibilité; il est naturel qu'ils soient situés entre des cas irréductibles.

2. Les surfaces précédemment considérées étaient définies par la considération de l'ordonnée et de la normale en un point M; ces droites perçant yOx en des points m et n, le triangle Omn devait avoir une aire ne dépendant que de l'ordonnée $z = Mm$. Partant de là on trouvait sans peine pour équation de ces surfaces

$$\Phi(z) = a\theta + F(r), \tag{1}$$

z, r, θ représentant des coordonnées semi-polaires, a étant une constante arbitraire, F et Φ des fonctions arbitraires. Il avait été mentionné dans le précédent article que les surfaces (1) contenaient, comme cas particuliers, les conoïdes, les surfaces de révolution, les hélicoïdes et les surfaces spirales.

Remarquons qu'à la première définition des surfaces (1) on peut immédiatement en adjoindre une seconde; ces surfaces sont engendrées par une courbe *arbitraire* $a\theta + F(r) = 0$ dont le plan, constamment normal à Oz et percé au même point par cet axe, tourne autour de Oz suivant une loi dépendant d'une manière *quelconque* de son ordonnée.

Sans rien particulariser, j'ai donné pour première équation des asymptotiques de (1)

$$\left(F'' - F'^2 \frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) dr^2 - 2a\left(\frac{1}{r} - F' \frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) dr\, d\theta + \left(rF' - a^2 \frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) d\theta^2 = 0. \tag{2}$$

Cette équation suppose qu'on peut porter dans $\frac{\Phi''}{\Phi'^2}$ la valeur de z tirée de (1). Elle définit alors, en coordonnées polaires, la projection des asymptotiques sur yOx. L'élimination de z est évitée de façon avantageuse si l'on élimine θ entre (1) et (2). Il vient

alors

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(F'' + \frac{2}{r}F' - \frac{r}{a^2}F'^3\right)dr^2 \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{r}\Phi' + \frac{r}{a^2}F'^2\Phi'\right)dr\,dz + \left(\frac{r}{a^2}F'\Phi'^2 - \Phi''\right)dz^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation a sur (2) l'avantage de ne contenir explicitement que les deux variables r et z ; elle définit deux familles de surfaces de révolution coupant la surface (1) suivant les deux familles d'asymptotiques. On peut encore la simplifier en posant

$$(4)\qquad \Phi'' = \Phi'^2 f(\Phi),$$

ce qui revient à supposer que la fonction arbitraire Φ est définie par l'intermédiaire d'une fonction f au moyen de la formule

$$(5)\qquad z = \int e^{-\int f(\Phi)\,d\Phi}\,d\Phi,$$

d'où l'on doit finalement tirer Φ en fonction de z.

Alors (3) devient

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(F'' + \frac{2}{r}F' + \frac{r}{a^2}F'^3\right)dr^2 \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{r} + \frac{r}{a^2}F'^2\right)dr\,d\Phi + \left[\frac{r}{a^2}F' - f(\Phi)\right]d\Phi^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

N'était la présence du seul terme $f(\Phi)$, l'équation serait d'un type banal immédiatement intégrable par quadratures et, cependant, si l'on conserve ce terme, elle paraît défier toutes les méthodes élémentaires d'intégration. Bien plus, comme je l'ai montré dans mon précédent article, les seuls cas particuliers où l'on se ramène *immédiatement* aux quadratures en faisant de $f(\Phi)$ une constante nulle ou non nulle conduisent aux hélicoïdes et à des surfaces comparables aux surfaces

spirales, d'où les résultats bien connus quant aux asymptotiques.

Faut-il donc renoncer à quelque chose de général concernant l'équation (6)? Le problème paraît fort difficile, bien que son intérêt, ainsi mis en lumière, ne soit pas douteux.

Je n'ai pu aller bien loin dans l'étude des généralités, mais je crois avoir trouvé quelques résultats particuliers dignes d'être ajoutés à ceux que l'on possède déjà.

Examinons d'abord le discriminant qui, toutes réductions faites, peut s'écrire

$$\Delta = \frac{1}{r^2} - \frac{r}{a^2} F' F'' + f(\Phi) \left(F'' + \frac{2}{r} F' + \frac{r}{a^2} F'^3 \right).$$

Toutes ses simplifications simplifient évidemment l'équation (6) et nous serons ainsi conduits à examiner les surfaces (1) où, la fonction $\Phi(r)$ restant quelconque, la fonction $F(r)$ satisfera à l'une ou à l'autre des équations différentielles

$$(7) \qquad F'' + \frac{2}{r} F' + \frac{r}{a^2} F'^3 = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{1}{r^2} - \frac{r}{a^2} F' F'' = 0.$$

Nous étudierons d'abord l'équation (7), étude qui nous conduira à des comparaisons concernant les conoïdes droits; c'est pourquoi le paragraphe suivant est consacré à ces conoïdes.

3. *Retour sur les conoïdes.* — Pour les conoïdes droits $\Phi(z) = a\theta$, l'équation (3) donne immédiatement pour les asymptotiques distinctes des génératrices

$$(9) \qquad r^2 \Phi'(z) = \text{const.}$$

Cette équation exprime, comme je l'ai remarqué antérieurement, que, *le point* M *décrivant une asymptotique sur le conoïde, le rayon vecteur* O*m balaye des aires dont la variation est proportionnelle à celle de l'ordonnée m*M.

Or c'est là la propriété caractéristique des courbes dont la tangente appartient à un complexe linéaire, l'axe de ce complexe étant Oz [P. Appell, *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide* (*Annales de l'École Normale*, 1876, p. 265)]. On voit qu'il est indifférent de désigner ainsi ces courbes ou de dire que ce sont les asymptotiques d'un conoïde droit. Le plan osculateur qui a son foyer au point d'osculation est évidemment le plan tangent au conoïde. Ces considérations ont été reprises par M. E. Picard dans son *Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches* (*Annales de l'École Normale*, 1877, p. 329). Les mêmes courbes ont été étudiées par d'autres auteurs, par exemple par M. E. Goursat (*Traité d'Analyse*, t. I, p. 518), chacun les représentant par des équations différentes. Ici nous avons

$$\Phi(z) = a\theta, \qquad r^2\Phi'(z) = C.$$

Si l'on imagine qu'on tire de la première équation $z = \varphi(\theta)$, le tout se transforme immédiatement en

$$z = \varphi(\theta), \qquad x = \sqrt{C\varphi'(\theta)}\cos\theta, \qquad y = \sqrt{C\varphi'(\theta)}\sin\theta.$$

C'est une forme donnée encore par M. Appell (*Traité de Mécanique rationnelle*, Exercices du Chap. I).

Bien que je ne puisse faire ici une bibliographie complète du sujet, il me semble particulièrement intéressant de mentionner que, dans le présent Volume

(p. 35), en janvier 1909, c'est-à-dire entre le présent Mémoire et le précédent, M. E. Keraval est revenu sur les courbes précédentes d'une manière pleine d'intérêt. Il les considère aussi comme situées à la fois sur des conoïdes et sur des surfaces de révolution.

Ces résultats étant rappelés, nous allons voir comment ils se généralisent sur de certaines surfaces qui sont elles-mêmes des généralisations de conoïdes.

4. *Asymptotiques d'une surface réglée à plan et à cylindre directeurs.* — Prenons la surface (1) pour laquelle la fonction $F(r)$ serait définie par l'équation (7). Il est facile, sans calcul, de prévoir quelle surface on doit obtenir.

Si (7) a lieu, l'équation (3) nous montre que la surface en litige est coupée suivant une famille d'asymptotiques par tous les plans parallèles à Oxy. Or, en général, des asymptotiques ne peuvent être planes, à moins qu'elles ne soient droites. La surface (1) doit donc se réduire à une surface réglée ayant Oxy pour plan directeur. De plus, d'après les généralités du n° 2, la surface doit être engendrée par une section plane parallèle à Oxy, dont l'ordonnée varie cependant que cette section tourne, suivant une loi quelconque dépendant de z, autour de Oz.

C'est dire que les génératrices de la surface doivent être aussi tangentes à un cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon arbitraire k.

Analytiquement, l'équation (7) s'intègre très facilement en la multipliant par F' et en prenant F'^2 pour fonction inconnue. On a ainsi

$$F' = \frac{ak}{r\sqrt{r^2 - k^2}}, \qquad F = a \arccos \frac{k}{r},$$

d'où la surface

$$\Phi(z) = a\theta + a \arccos \frac{k}{r}.$$

On peut supposer que la seconde constante d'intégration rentre dans $\Phi(z)$ et qu'il en est de même pour la constante a. Pour $a = 1$ on a donc finalement

$$(10) \qquad r \cos[\theta - \Phi(z)] = k,$$

ce qui est bien la surface prévue. $\Phi(z)$ est l'argument de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de Oz sur la génératrice de même cote.

Si l'on porte l'expression trouvée pour F dans l'équation (3), on obtient

$$\frac{2r\,dr}{\sqrt{r^2 - k^2}}\Phi' - (k\Phi'^2 - \Phi''\sqrt{r^2 - k^2})\,dz = 0,$$

ce qui doit définir pour la surface (10) les asymptotiques différentes des génératrices.

Posant

$$R^2 = r^2 - k^2,$$

il vient

$$\frac{dR}{dz} + \frac{\Phi''}{2\Phi'}R = \frac{k}{2}\Phi',$$

équation linéaire qui, abstraction faite du second membre, a pour intégrale

$$(11) \qquad R^2\Phi' = \text{const.}$$

et qui, en faisant varier la constante, donne finalement

$$(12) \qquad R^2\Phi' = \frac{k^2}{4}\left(\int \Phi'^{\frac{3}{2}}\,dz\right)^2.$$

5. L'intérêt des résultats obtenus jusqu'ici ne consiste pas précisément dans le fait que la surface (10) a ses asymptotiques déterminées par (12), c'est-à-dire

par une seule quadrature, car il en est ainsi pour toutes les surfaces réglées à plan directeur [1]. Il consiste dans une généralisation du théorème du n° 3 relatif à l'aire balayée par le rayon vecteur Om, généralisation à laquelle on est conduit en comparant les équations (9) et (11).

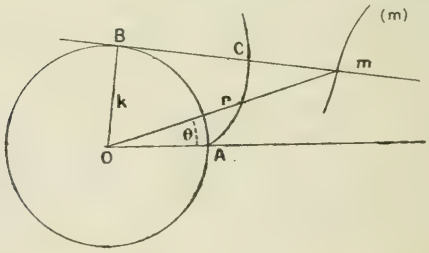
Comme on a

$$\Phi' dz = d\theta + d\left(\text{arc cos}\frac{k}{r}\right),$$

on voit facilement que $(r^2 - k^2)\Phi' dz$, c'est-à-dire le produit par dz du premier membre de (12), peut s'écrire

$$r^2 d\theta + k\, d\left(\sqrt{r^2 - k^2} - k \text{ arc cos}\frac{k}{r} - k\theta\right).$$

Or, considérons dans le plan Oxy le cercle de centre



O et de rayon k; du point m situé sur la projection (m) de l'asymptotique passant par M, menons la tangente mB et traçons la développante AC. L'expression

---

[1] Il faut cependant observer qu'en général on part de la surface $z = y\varphi(x) + \psi(x)$ dont on détermine par une quadrature très simple la projection des asymptotiques sur Oxy. Mais ce plan n'est pas le plan directeur, et, par suite, le résultat auquel je fais allusion serait ici d'une utilité contestable.

précédente peut s'écrire

$$r^2\,d\theta + k\,d(\overline{Bm} - \text{arc}\,AB),$$

et, comme l'arc AB est précisément égal à BC, on a

$$r^2\,d\theta + k\,d\overline{Cm} = \Psi(z)\,dz,$$

$\Psi(z)$ désignant le second membre de (12).

Supposons que le point m prenne sur (m) deux positions m_1 et m_2; soient C_1 et C_2 les points C correspondants, S_1 et S_2 les aires balayées par Om quand ce rayon vecteur, partant d'une position fixe, devient Om_1 ou Om_2; soient enfin z_1 et z_2 les ordonnées des points de la surface qui se projettent en m_1 et m_2. En intégrant la relation précédente, on aura

$$(13)\qquad 2(S_2 - S_1) + k(\overline{C_2 m_2} - \overline{C_1 m_1}) = \int_{z_1}^{z_2} \Psi(z)\,dz.$$

Si $k = 0$, $\Psi(z)$ doit être remplacé par une simple constante et l'on retrouve le théorème énoncé par M. Appell dans sa Thèse, et qui a été rappelé ici au début du n° 3.

6. *Application à une surface* (10) *du type hélicoïdal.* — Soit dans l'équation (10) $h\Phi(z) = 2z$, h étant une constante. On a ainsi la surface réglée engendrée par une droite perpendiculaire à Oz, située à la distance k de cet axe et animée autour de lui d'un mouvement hélicoïdal régulier. La constante h définit si l'on veut le pas du mouvement hélicoïdal. L'équation (12) devient

$$h^2(r^2 - k^2) = k^2(z - C)^2.$$

Ces hyperboloïdes de révolution, qui coupent l'hélicoïde considéré suivant ses asymptotiques, sont tous

identiques à l'hyperboloïde

$$\frac{r^2}{k^2} - \frac{z^2}{h^2} = 1,$$

dont ils se déduisent par une simple translation dans la direction Oz.

De plus, on a dans ce cas

$$\Psi(z) = \frac{2k^2}{h^3}(z - C)^2$$

et le second membre de (13) devient

$$\frac{2k^2}{3h^3}[(z_2 - C)^3 - (z_1 - C)^3].$$

Comme z est de nature logarithmique, par rapport aux coordonnées x, y, on voit qu'il en est de même de l'aire $S_2 - S_1$ balayée par Om.

Je ne puis qu'indiquer ici qu'on trouverait facilement un grand nombre d'exemples analogues.

On pourrait construire des surfaces (10) dont les asymptotiques se projetteraient suivant des courbes dont le rayon vecteur Om balayerait des aires à expression algébrico-logarithmique. Ce serait la généralisation des asymptotiques *unicursales* des conoïdes droits pour lesquelles Om balaye des aires à expression rationnelle (P. Appell et E. Picard, *loc. cit.* — P. Appell et E. Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, p. 351).

7. *Asymptotiques d'une certaine surface de Monge.* — Étudions maintenant la surface (1) lorsque la fonction F est définie non plus par l'équation (7), comme dans ce qui précède, mais par l'équation (8). De (8) on conclut d'abord

$$F'^2 = a^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{r^2}\right),$$

k désignant une constante d'intégration. On voit que, F contenant a en facteur, on peut supposer dans (1) que cet a rentre dans $\Phi(z)$. On ne diminuera donc pas la généralité en donnant à a une valeur fixe qui sera ici k. On aura alors

$$F'^2 = 1 - \frac{k^2}{r^2}, \qquad F = \pm\left(\sqrt{r^2 - k^2} - k \operatorname{arc\,cos} \frac{k}{r}\right)$$

et la surface (1) sera

$$(14) \qquad \Phi(z) = k\theta \pm \left(\sqrt{r^2 - k^2} - k \operatorname{arc\,cos} \frac{k}{r}\right).$$

Elle est engendrée par la développante d'un cercle de rayon k dont le plan, normal à Oz, tourne autour de cet axe suivant une loi quelconque dépendant de l'ordonnée z.

Le double signe n'a pas d'utilité réelle; il correspond aux deux branches de la même développante situées de part et d'autre du point de rebroussement.

Il revient au même pour engendrer une telle surface de construire le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon k, de tracer une courbe quelconque dans l'un de ses plans tangents et de faire rouler ce plan sur le cylindre.

Il s'agit donc d'une surface de Monge et, plus exactement, d'une surface moulure.

Or, il serait bien intéressant d'avoir un résultat concernant les asymptotiques d'une de ces surfaces sur lesquelles les lignes de courbure sont en évidence et ont des propriétés si élégantes.

Prenons l'équation (6); substituons-y l'expression attribuée ici à F' et remplaçons toujours a par k. Pour équation différentielle des asymptotiques de (14), nous aurons

$$\frac{r^2\,dr^2}{k^2\sqrt{r^2 - k^2}} - \frac{2r}{k^2}\,dr\,d\Phi + \left[\frac{\sqrt{r^2 - k^2}}{k^2} - f(\Phi)\right] d\Phi^2 = 0.$$

Si l'on pose encore $R^2 = r^2 - k^2$, il vient

$$(15) \qquad \frac{dR}{d\Phi} = 1 \pm k\sqrt{\frac{f(\Phi)}{R}},$$

le double signe correspondant aux deux systèmes d'asymptotiques.

C'est là une équation élégamment réduite, mais qui paraît cependant n'appartenir à aucun type intégrable de manière élémentaire, du moins tant qu'on laisse toute sa généralité à $f(\Phi)$.

Malgré son caractère négatif, cette conclusion semble utile à mentionner.

Elle montre les difficultés très grandes que doit présenter une étude générale de l'équation (6), puisque, même réduite à (15) au moyen d'une hypothèse très particulière sur $F(r)$, on rencontre encore des difficultés transcendantes.

Pour $f(\Phi) = \Phi$, l'équation (15) est homogène et facile à intégrer explicitement. Mais alors c'est la relation (5) qui doit déterminer $\Phi(z)$ qui offre une quadrature impossible à exprimer explicitement.

Si l'on convient de passer sur cette dernière difficulté, on peut tout de même dire qu'on connaît une famille de surfaces de Monge, dépendant de deux paramètres arbitraires, sur lesquelles les asymptotiques sont déterminables de manière élémentaire.

D'ailleurs, on augmenterait encore un peu la généralité en prenant

$$f(\Phi) = \alpha\Phi + \beta,$$

α et β étant deux constantes; l'équation (15) se ramène alors sans peine au type homogène.

8. *Retour sur les surfaces de révolution.* — Si l'on fait $a = 0$ dans l'équation (1), on a la surface de révo-

lution

$$\Phi(z) = F(r). \tag{16}$$

L'équation (2) donne alors pour définir les asymptotiques

$$\left(F'' - F'^2 \frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) dr^2 - r F' \, d\theta^2 = 0.$$

Si l'on remplace $\Phi(z)$ par z, ce qui ne diminue pas la généralité, on a, plus simplement,

$$F'' \, dr^2 + r F' \, d\theta^2 = 0; \tag{17}$$

c'est l'équation bien connue qui définit les asymptotiques de la surface $z = F(r)$ en les projetant sur le plan $z = 0$.

Si, au contraire, on remplace $F(r)$ par r, on a

$$\Phi'' \, dr^2 - r \Phi'^2 \, d\theta^2 = 0.$$

Comme on a alors

$$r = \Phi(z), \qquad dr = \Phi'(z) \, dz,$$

il vient finalement

$$\Phi'' \, dz^2 - \Phi \, d\theta^2 = 0. \tag{18}$$

Cette équation définit les asymptotiques de la surface $r = \Phi(z)$ en la coupant par des conoïdes droits ayant Oz pour directrice. Elle est moins connue que l'équation (17) et permet cependant, comme on va le voir, d'obtenir très rapidement des résultats extrêmement intéressants.

Remarquons d'abord qu'au point de vue de la détermination des asymptotiques, il y a ici une certaine réciprocité entre les conoïdes droits et les surfaces de révolution.

Comme on l'a vu au n° 3, l'équation (9) détermine

les asymptotiques d'un conoïde en le coupant par une famille de surfaces de révolution. De même (18) détermine les asymptotiques d'une surface de révolution en la coupant par une famille de conoïdes.

Nous aurons une première application très élégante de (18) en déterminant $\Phi(z)$ par l'équation linéaire

$$k^2\Phi'' - \Phi = 0,$$

où k est une constante. On obtiendra ainsi les surfaces

$$(19) \qquad r = \Phi(z) = A\,e^{\frac{z}{k}} - B\,e^{-\frac{z}{k}},$$

où A et B sont deux constantes arbitraires, pour lesquelles l'équation (18) se réduira à

$$dz = \pm k\,d\theta,$$

d'où

$$(20) \qquad z = \pm k\theta.$$

Ce sont là des hélicoïdes réglés qui ne font que tourner autour de Oz si l'on ajoute une constante d'intégration. Si l'on élimine z entre (19) et (20), on obtient les courbes

$$(21) \qquad r = A\,e^{+\theta} - B\,e^{-\theta},$$

qui, par rotation autour du pôle, donnent toutes les projections, sur le plan $z = 0$, des asymptotiques des surfaces (19).

Parmi les surfaces (19) il convient de signaler l'alysseïde ou caténoïde dont le méridien est une chaînette ayant Oz pour base. On a alors

$$2A = 2B = k.$$

Les courbes (21) sont alors des transformées par inversion de certaines herpolhodies particulières. Dit-

trich les appelait *Summenspiralen* (*voir* plus loin).

Un cas plus intéressant encore correspond à $2A = -2B = k$. On a alors la surface

$$(22) \qquad r = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{z}{k}} - e^{-\frac{z}{k}}\right),$$

dont les asymptotiques sont, bien entendu, sur les hélicoïdes (20) et se projettent de plus suivant les courbes

$$(23) \qquad r = \frac{k}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta}).$$

Mais on reconnaît là sans peine la projection d'un système de *lignes de courbure* de chacun des hélicoïdes (20). Donc, *si la surface fixe* (22) *est coupée par les hélicoïdes* (20), *invariables en eux-mêmes, mais animés d'un mouvement de rotation autour de* Oz, *les intersections sont lignes asymptotiques sur la surface de révolution et lignes de courbure sur les hélicoïdes.* Et sur l'hélicoïde il suffit évidemment de connaître une ligne de courbure d'un système et de la faire glisser sur la surface pour obtenir toutes celles du même système.

La courbe (23) est connue et présente un intérêt propre. C'est la *Differenzenspirale* de Dittrich (*Die logarithmische Spirale*, Breslau, 1872), ainsi nommée parce que le rayon vecteur est la différence de ceux de deux spirales logarithmiques inverses. M. Aubry l'a considérée aussi dans un travail qui traite *de l'usage des figures dans l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes* (*Journal de Mathématiques spéciales* de G. de Longchamps, 1896) et l'appelle *spirale tractrice* (E. Wölffing, *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. V, 1898, p. 130. —

H. Brocard, *Courbes géométriques. Compléments*, p. 169. — G. Loria, *Ebene Kurven*, p. 455).

Pour $B = 0$ l'équation (19) représente la surface harmonique de révolution dont le méridien est une logarithmique. Les asymptotiques des deux systèmes se projettent suivant deux familles de spirales logarithmiques homothétiques [1].

9. On sait, ce que j'ai d'ailleurs rappelé dans mon premier article (n° 4), que la détermination des surfaces de révolution, dont on définit à l'avance la projection des asymptotiques, est un problème élémentaire résoluble par deux quadratures. On peut ici se proposer le problème correspondant qui consiste à *déterminer une surface de révolution de telle manière que ses asymptotiques soient sur les deux familles de conoïdes*

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \psi(z). \tag{24}$$

D'après (18) on obtient une famille $r = \Phi(z)$ à deux paramètres arbitraires, la fonction Φ étant définie par l'équation

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \psi(z)\Phi = 0. \tag{25}$$

Ce n'est plus là un problème élémentaire. L'équation (25) ne peut s'intégrer, en général, que par approximations successives (É. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. VI).

---

[1] Dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXI, 1903, j'ai montré incidemment que la détermination de toutes les surfaces dont *un système* d'asymptotiques se projette suivant une famille de spirales logarithmiques homothétiques se ramène à l'intégration de l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre $r = q$.

Elle joue un rôle capital en Physique mathématique, notamment dans le problème du refroidissement d'une barre hétérogène, et en Mécanique céleste où elle est à la base de l'étude des mouvements du nœud et du périgée dans les théories lunaires de Hill et Brown. Je signale ces points parce qu'il me semble intéressant de comparer à ces questions difficiles un problème d'apparence élémentaire conduisant cependant à une difficulté analytique de même nature.

Toutefois, en prenant les choses d'une manière moins élevée, on pourrait avoir un grand nombre de familles de surfaces de révolution dont les asymptotiques se trouveraient sur des conoïdes connus. Prenons une fonction $\Phi(z)$; d'après (25), déterminons $\psi(z)$ comme étant le quotient de Φ'' par Φ, ce qui déterminera les conoïdes (24). Quant à l'équation (25) nous en déterminerons l'intégrale générale en nous appuyant sur la connaissance de la solution particulière Φ, ce qui n'exigera qu'une quadrature.

Cherchons pour (25) une intégrale de la forme uv; il vient

$$uv'' + 2v'u' - [u'' - \psi(z)u]v = 0.$$

Si u est une solution particulière, on a seulement

$$uv'' + 2v'u' = 0,$$

d'où

$$v = A + B\int \frac{dz}{u^2},$$

et l'intégrale générale est

$$Au + Bu\int \frac{dz}{u^2}.$$

En résumé, *les surfaces de révolution*

$$r = A\Phi(z) + B\Phi(z)\int \frac{dz}{[\Phi(z)]^2}$$

ont leurs asymptotiques sur les conoïdes

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)}$$

tout comme la surface $r = \Phi(z)$.

Si $\Phi(z)$ est une exponentielle, on retrouve les résultats du n° 8.

Je reviendrai sur ce théorème dans une troisième Note qui contiendra de nouveaux résultats obtenus depuis que la seconde a été envoyée à l'impression.

[A3g]

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES [1];

PAR M. L. ZORETTI,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Je me propose d'indiquer sommairement comment on peut *dans la pratique* appliquer la méthode d'approximations successives au calcul des racines des équations numériques. On sait comment M. Goursat a tiré parti de la méthode de M. Picard pour démontrer le théorème d'existence des fonctions implicites. On verra ici comment des considérations analogues, directement inspirées par le Mémoire de M. Goursat, peuvent être appliquées dans un problème pratique d'Algèbre élémentaire.

---

[1] Pendant l'impression de cet article, a paru dans les *Comptes rendus de l'Academie des Sciences* une Note de M. de Montessus sur le même sujet. Toutefois, les différences avec celle-ci sont assez nombreuses, surtout dans la méthode d'application.

I. Considérons l'équation

$$x = f(x), \tag{1}$$

$f(x)$ étant une fonction de la variable réelle x pourvue d'une dérivée. Soit x_0 une valeur approchée d'une racine de cette équation. Calculons successivement les nombres

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1), \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= f(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Cherchons à quelle condition le nombre x_n tend vers une valeur limite. Il suffit pour cela que la série

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots \tag{2}$$

soit absolument convergente. Or on a

$$x_n - x_{n-1} = (x_{n-1} - x_{n-2}) f'(\xi_{n-1}),$$

ξ_{n-1} désignant une valeur de x comprise entre x_{n-1} et x_{n-2}.

Par suite,

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \right| = f'(\xi_{n-1}).$$

Si l'on sait que la dérivée est suffisamment petite en valeur absolue dans un voisinage suffisant de la valeur x_0, on pourra donc affirmer que la série (2) est absolument convergente. On en déduit sans peine que la somme de cette série est un nombre x qui résoud l'équation (1).

Je ne précise pas davantage les conditions de convergence et me borne à faire deux remarques, les seules que j'utiliserai.

D'abord la convergence sera rapide si $f'(\xi)$ est petit en valeur absolue. En particulier, si $f'(x_0)$ est nul (et

si, bien entendu, la dérivée est continue), nous serons dans de très bonnes conditions.

Supposons de plus que $f'(x)$ soit négative au voisinage de x_0. Alors le rapport

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

est négatif. La série (2) est alternée. Nous obtenons donc successivement des valeurs approchées par défaut et par excès de la racine. Dans ce cas, auquel, on va le voir, nous nous ramènerons toujours, je précise les conditions de convergence : il suffit que la dérivée f' soit constamment inférieure à 1 en valeur absolue dans l'intervalle $x_0 x_1$ (et x_1 est voisin de x_0).

II. Soit donnée l'équation

$$\varphi(x) = 0 \tag{3}$$

que nous supposerons admettre une racine et une seule dans l'intervalle $x_0\, x'$. Nous allons mettre l'équation (3) sous la forme (1) et dans les conditions les plus favorables pour le calcul.

L'équation (3) est équivalente à l'équation

$$x = \frac{\varphi(x)}{A} + x,$$

A étant une constante.

Déterminons cette constante de façon que la fonction

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{A} + x$$

ait sa dérivée nulle pour $x = x_0$. Cela donne évidemment

$$A = -\varphi'(x_0).$$

Supposons A ainsi choisi (et non nul). Nous pour-

rons alors appliquer le procédé précédent de calcul de la racine, pourvu que

$$\left|1 - \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(x_0)}\right| < 1.$$

Cela impose que $\frac{\varphi'(x)}{A}$ soit négatif : ce rapport est égal à -1 pour $x = x_0$. Je supposerai qu'il ne change pas de signe dans l'intervalle $x_0 x'$. Il faut encore que le même rapport ne soit pas inférieur à -2 : on peut supposer encore cette condition remplie si la dérivée seconde φ'' n'est pas trop grande et l'intervalle $x_0 x$ assez petit.

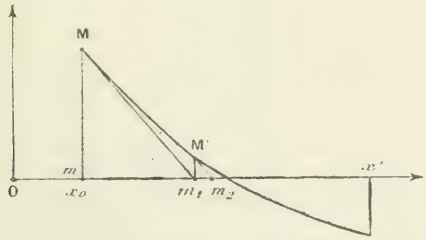
III. Voyons maintenant à laquelle des deux valeurs $x_0 x'$ il convient d'appliquer le procédé. Je me baserai pour cela sur la signification géométrique de la méthode.

Soit (*fig.* 1) la courbe

$$y = \frac{\varphi(x)}{A} = g(x);$$

on a $g'(x_0) = -1$. La tangente au point x_0 est donc

Fig. 1.



parallèle à la seconde bissectrice (en supposant les deux échelles identiques). On a d'abord

$$x_1 = x_0 + g(x_0) = \overline{Om} + \overline{mM}.$$

Or, en appelant m_1 le point de rencontre de la tangente avec l'axe Ox, on a

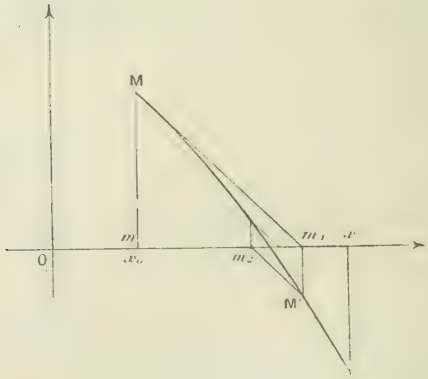
$$\overline{mM} = \overline{mm_1},$$

et, par suite,

$$x_1 = \overline{Om} + mm_1 = \overline{Om_1}.$$

Menons ensuite par M' la parallèle $M'm_2$ à la seconde bissectrice; nous avons la deuxième valeur approchée $x_2 = \overline{Om_2}$, et ainsi de suite. On reconnaît sans peine : 1° que la méthode se confond avec celle de Newton pour le calcul de x_1 ; 2° en examinant les différents cas de figure, on voit que si $g(x)g''(x) > 0$ la méthode est moins avantageuse que celle de Newton, et au contraire, si $g(x)g''(x) < 0$ (*fig.* 2), on obtient des valeurs approchées alternativement par excès et par défaut. Ceci est facile à retrouver algébriquement. Nous avons dit, en effet, que la série (2) est alternée quand la dérivée f' est négative. Supposons, par exemple, $g(x_0) > 0$ et $x_0 < x'$; la dérivée f' est nulle pour x_0,

Fig. 2.



négative ensuite; elle doit donc décroître et f'' doit être négative. De même, si $g(x_0) < 0$, on devra avoir

$f'' > 0$. En d'autres termes, il faut que gf'' soit négatif.

Or

$$g(x) = f(x) - x$$

donne

$$g''(x) = f''(x)$$

et l'on a bien la condition annoncée

$$g(x)\, g''(x) < 0.$$

Si nous remarquons maintenant que

$$g(x)\, g''(x) = \frac{\varphi(x)\, \varphi''(x)}{A^2},$$

nous voyons qu'il y a tout intérêt en définitive à appliquer la méthode précédente de préférence (mais ça n'est pas indispensable) à celle des deux valeurs approchées x_0, x' qui rend $\varphi(x)\, \varphi''(x) < 0$, c'est-à-dire à celle à laquelle on a l'habitude de ne pas appliquer la méthode de Newton.

IV. Il me reste maintenant à évaluer l'erreur commise par l'application de la méthode et à la comparer au point de vue pratique avec celle de Newton.

Soient x la racine, x_n, x_{n-1} deux valeurs consécutives données par la méthode; on a

$$x = f(x),$$
$$x_n = f(x_{n-1});$$

donc

$$x - x_n = f(x) - f(x_{n-1}) = (x - x_{n-1}) f'(\xi_n).$$

L'erreur commise à la $n^{\text{ième}}$ approximation est donc le produit de l'erreur précédente par la dérivée prise pour une valeur voisine de x ou x_{n-1}. On remplacera évidemment f' par une limite supérieure de son module de x_n à x_{n-1}.

Dans la méthode de Newton, en appelant h l'erreur

de la $n - 1^{\text{ième}}$ opération, l'erreur de la suivante est

$$\frac{h^2 f''}{2f'}.$$

D'où deux conséquences : 1° la méthode d'approximations successives *paraît* bien moins avantageuse, à cause du facteur h^2 de l'expression précédente, tandis que dans la première formule d'erreur le facteur h n'est qu'à la première puissance; 2° quand la dérivée f' est petite par rapport à f'', la méthode de Newton n'est plus très avantageuse ; au contraire, dans la méthode précédente, nous ramenons toujours f' à être petit et l'on peut dire que cette méthode a l'avantage de donner toujours à peu près le même résultat quelle que soit la fonction $\varphi(x)$.

Voyons maintenant si l'infériorité systématique que je viens de signaler ne serait pas plus apparente que réelle. D'ordinaire, au lieu de calculer l'erreur dans l'emploi de la méthode de Newton, on préfère employer simultanément la méthode d'interpolation; on obtient ainsi deux valeurs approchées de sens contraire, l'erreur gardant la même expression que tout à l'heure. Supposons alors que nous appliquions la méthode d'approximations successives de façon à avoir des valeurs approchées alternativement par défaut et par excès; nous serons bien dans les deux cas dans des conditions comparables. Or, si après une première application de la méthode l'erreur est proportionnelle à h, après deux applications elle sera proportionnelle à h^2, et l'on voit que les méthodes sont aussi avantageuses l'une que l'autre.

Il ne reste à les comparer qu'au point de vue de la simplicité des calculs. La méthode d'approximations successives demande quelques calculs préalables

bien simples qui n'existent pas dans les autres méthodes ; mais ensuite les calculs successifs sont plus rapides, puisqu'il faut calculer simplement f au lieu de f, f' et $\frac{f}{f'}$ par exemple. C'est donc bien là une méthode pratique ; on peut d'ailleurs s'en rendre compte par des exemples que je ne veux pas développer ici.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1909.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère une hélice (H) *tracée sur un cylindre de révolution ayant* Oz *pour axe. Soient* a *le rayon du cercle de base et* h *le pas réduit, c'est-à-dire que* $2\pi h$ *est la longueur interceptée par deux spires consécutives sur toute génératrice du cylindre. Sur l'hélice* (H) *on prend deux points* L *et* N, *et l'on considère le centre de gravité* G *de l'arc* LN *supposé homogène.*

I. *On suppose que l'arc* LN *varie en conservant le même milieu* M.

Démontrer que, dans ces conditions, le point G *décrit une droite rencontrant normalement* Oz.

II. *On demande le lieu du point* G, *quand l'arc* LN *varie de telle manière que la corde* LN *reste parallèle à un plan fixe quelconque.*

III. *Appelons* (S) *la surface lieu du point* G *lorsque* L *et* N *varient arbitrairement sur l'hélice. Montrer que le plan tangent en* G *à la surface* (S) *n'est autre que le plan* π *mené par les extrémités* L, N *de l'arc et par son milieu* M.

Comment varie ce plan tangent lorsque l'arc varie en conservant le même milieu?

IV. *On suppose que chaque élément ds de l'arc* LN *attire un point fixe,* P, *proportionnellement à la distance r de ce point à l'élément, et proportionnellement à la longueur ds elle-même, en sorte que l'attraction exercée par l'élément ds sur le point* P *a pour expression* $\mu r\, ds$, *où* μ *désigne une constante positive.*

On demande de démontrer que les attractions exercées sur le point P *par l'ensemble des éléments ds ont pour résultante une force finie* F *dirigée vers le point* G.

Dire quelle est l'expression de cette résultante F.

V. *Avec quelle vitesse faudrait-il lancer le point* P *à partir du point* L *pour qu'il décrive, sous l'influence de la force* F, *le cercle* Ω *qui a pour centre le point* G *et qui passe non seulement au point* L, *mais encore au point* N.

I. Si l'on considère un arc LN d'une hélice tracée sur un cylindre *absolument quelconque* dont les génératrices sont parallèles à Oz, on remarque d'abord que, puisque le rapport de tout élément de cet arc à sa projection sur Oxy est constant, la projection du centre de gravité G sur le plan Oxy coïncide avec le centre de gravité g de la projection ln de l'arc sur ce même plan.

D'autre part, si l'on déforme arbitrairement la section droite du cylindre (supposée, bien entendu, inextensible), le z du centre de gravité G de l'arc LN ne change pas. Or, lorsque la section droite est devenue rectiligne, ce centre de gravité vient au milieu du segment LN devenu lui-même rectiligne. Donc le z de G est le même que celui du milieu M de LN.

Cette double propriété, *indépendante*, comme on le voit, *de la forme de la section droite du cylindre*, montre, lorsque cette section droite est un cercle de centre O, que le point G se projette au centre de gravité g de l'arc de cercle ln, situé sur la bissectrice Om de l'angle lOn (*fig.* 1) à une distance de O telle que

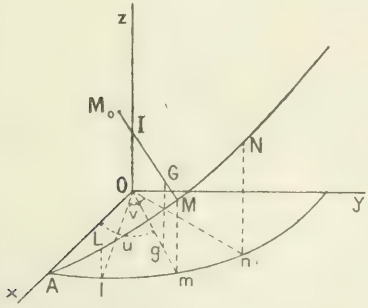
$$(1) \qquad Og = a\frac{\sin v}{v},$$

et de plus que

$$(2) \qquad gG = mM = hu.$$

Le lieu de G, lorsque M est fixe, est donc la parallèle

Fig. 1.



à Om menée par M, c'est-à-dire *la perpendiculaire abaissée de* M *sur* Oz. On voit en même temps que

les coordonnées ξ, η, ζ de G sont

$$(3)\quad \xi = \frac{a \sin v}{v} \cos u, \qquad \eta = \frac{a \sin v}{v} \sin u, \qquad \zeta = hu.$$

Mais ce premier résultat appelle une discussion.

Nous venons, en effet, en désignant par I le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Oz, de voir que

$$\mathrm{IG} = \frac{a \sin v}{v}.$$

Or, lorsque v varie, le rapport $\frac{\sin v}{v}$ reste compris entre la valeur $+1$, correspondant à $v = 0$, et un minimum négatif correspondant à la plus petite valeur, non nulle, v_0 de v qui annule la dérivée de ce rapport, c'est-à-dire telle que

$$(4)\qquad v_0 = \operatorname{tang} v_0.$$

Cette équation pouvant s'écrire

$$\frac{\sin v_0}{v_0} = \cos v_0,$$

on voit que la valeur correspondante a_0 de IG est donnée par

$$a_0 = a \cos v_0,$$

valeur inférieure à a et négative, car v_0 est compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$ [1]. Appelons M_0 cette seconde position limite de G.

---

[1] Cela se voit immédiatement en remarquant que $\frac{\sin v}{v}$ est le coefficient angulaire de la droite unissant l'origine au point $x = v$ de la sinusoïde $y = \sin x$. Les maxima et minima de ce rapport sont donc donnés par les coefficients angulaires des tangentes menées de O à cette sinusoïde. La première de ces tangentes, après

Ainsi tous les points G correspondant à un point M donné se trouvent, sur la perpendiculaire MI à Oz, *entre les points* M *et* M_0.

Lorsqu'on fait varier le point M, la droite MM_0 engendre une *surface de vis à filet carré* sur laquelle nous distinguerons les filets $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_0$ engendrés respectivement par les vecteurs IM et IM_0.

Le lieu complet du point G [surface (S) de l'énoncé] se compose donc de l'ensemble de ces deux filets.

II. Le point G se trouve d'abord sur cette surface de vis (S) dont l'équation, obtenue par élimination de u et v entre les équations (3), s'écrit immédiatement

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{z}{h}. \tag{5}$$

Si la courbe LN est astreinte à une condition particulière, le point G doit, en outre, se trouver sur une seconde surface dont l'intersection avec la précédente constitue le lieu de ce point. Cherchons cette seconde surface lorsque LN reste parallèle à une même direction de plan ou, ce qui revient au même, orthogonale à une même direction de droite OK définie par ses angles polaires φ et ψ (*fig.* 2).

Les cosinus directeurs de OK sont donc

$$\sin\psi\cos\varphi, \qquad \sin\psi\sin\varphi, \qquad \cos\psi.$$

---

celle dont le point de contact est en O même, à un point de contact voisin du point $x = \frac{3\pi}{2}$ et un peu en avant de ce point. Le calcul montre qu'on a, à moins de 1″ près, $v_0 = 257°27'12''$, ce qui donne $IM_0 = a\cos v_0 = -0,2172\ldots a$.

Ceux de LN sont proportionnels à

$$a[\cos(u+v)-\cos(u-v)], \quad a[\sin(u+v)-\sin(u-v)],$$
$$h[u+v-(u-v)]$$

ou

$$-a\sin u\sin v, \quad a\sin v\cos u, \quad hv,$$

ou encore, eu égard à (3),

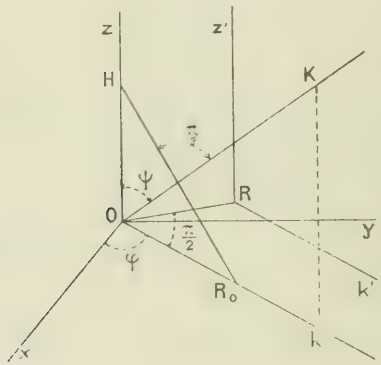
$$-\eta v, \quad \xi v, \quad hv.$$

La condition d'orthogonalité de LN et de OP s'écrit donc, après division par $v\sin\psi$,

$$-\eta\cos\varphi+\xi\sin\varphi+h\cos\psi=0.$$

Et la seconde surface, dont l'intersection avec (S

Fig. 2.



donne le lieu de G cherché, est donc le plan

$$(6) \qquad x\sin\varphi-y\cos\varphi+h\cot\psi=0.$$

Mais, ici encore, il faut remarquer que le lieu effectif de G ne comprend pas l'intersection complète du plan (6) et de la surface (5), mais seulement la partie

de cette intersection qui se trouve sur les filets $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_0$ ci-dessus définis.

Pour se rendre compte de la nature de cette intersection, remarquons qu'on peut toujours disposer des axes de façon que $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. L'équation (6) se réduit alors à

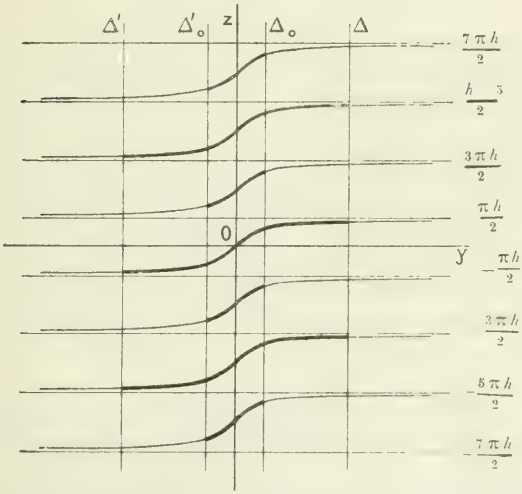
$$x = h \cot \psi, \tag{6'}$$

et l'équation de l'intersection dans son propre plan peut s'écrire

$$y = h \cot \psi \operatorname{tang} \frac{z}{h}.$$

C'est une *tangentoïde* à asymptotes horizontales, équidistantes de πh (*fig.* 3). De deux en deux ses

Fig. 3.



branches infinies correspondent au filet $\mathcal{F}$, les branches intermédiaires au filet $\mathcal{F}_0$. Les portions effectives sur les unes et les autres sont réelles si la distance de l'ori-

gine au plan sécant (6′), c'est-à-dire $h \cot\psi$, est inférieure au rayon du cylindre limitant le filet correspondant, a pour $\mathcal{F}$ et $a_0 = 0{,}217\,a$ pour $\mathcal{F}_0$.

En projection sur Oyz, les parallèles à Oz, Δ et Δ' d'une part, Δ_0 et Δ'_0 de l'autre, limitant les portions effectives du lieu, sont données par

$$y = \pm\sqrt{a^2 - h^2\cot^2\psi} \qquad \text{et} \qquad y = \pm\sqrt{a_0^2 - h^2\cot^2\psi}.$$

Remarque. — La construction géométrique du plan (6) est des plus simples (*fig.* 2).

D'abord la trace du plan (6) sur Oxy est parallèle à la projection Ok de OK sur ce plan; puis si, sur Oz, on porte $OH = h$ et que de H on abaisse sur OK la perpendiculaire HR_0, qui coupe Ok en R_0, on a

$$OR_0 = h\cot\psi$$

et, par suite, OR_0 est égal à la distance du plan (6) à l'origine. Mais, pour effectuer cette construction avec précision, il faut avoir égard au signe : ayant porté OH, sur Oz, dans le sens positif ou dans le sens négatif suivant que l'hélice est *dextrorsum* (*fig.* 1) ou *sinistrorsum*, on n'aura, dans tous les cas, qu'à faire tourner OR_0 d'un angle droit *dans le sens direct* (de Ox vers Oy) pour avoir la distance OR de l'origine au plan (6). Ce plan est alors obtenu en menant par R un plan $k'Rz'$ parallèle à kOz.

III. Si l'une des extrémités L d'un arc LN d'une courbe *quelconque* reste fixe, alors que l'autre N varie, la tangente à la courbe décrite par le centre de gravité G de l'arc passe constamment par le point N. Ce théorème bien connu est à peu près évident. Si, en effet, on fait croître l'arc LN d'un arc infiniment petit NN′, la droite sur laquelle se trouve le centre

de gravité de l'arc total LN′, obtenue en joignant le centre de gravité G de LN au centre de gravité de NN′, sensiblement confondu avec le milieu de NN′, coïncide à la limite avec GN. Cette droite GN appartient donc au plan tangent en G à la surface (S); de même pour GL. Le plan tangent en G n'est donc autre que le plan GLN, et l'on voit que ce théorème est vrai pour une courbe gauche quelconque.

Dans le cas de l'hélice, ce plan GLN contient aussi le point M, puisque les points L et N sont symétriques par rapport à la droite MG.

Il est, au reste, bien facile de vérifier ce théorème dans le cas de l'hélice. Nous venons de voir que la surface (S), engendrée par la droite MI, est une surface de vis à filet carré. Le plan tangent en G à cette surface est déterminé par la génératrice GM et la tangente en G à l'hélice de la surface passant en ce point. Pour démontrer le théorème il suffit de faire voir que cette tangente est parallèle à la droite LN qui, d'autre part, rencontre MG, ou, ce qui revient au même, que ces deux droites ont même pente sur le plan Oxy, puisque déjà elles sont toutes deux perpendiculaires à IM.

Or, la pente de la tangente à l'hélice décrite par M étant $\frac{h}{a}$, celle de la tangente à l'hélice décrite par G est $\frac{h}{a}\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IG}}$ ou $\frac{hv}{a\sin v}$.

D'autre part, la pente de LM est donnée par $\frac{n\mathrm{N}-l\mathrm{L}}{ln}$ ou $\frac{2hv}{2a\sin v}$; ces deux pentes sont bien les mêmes.

Si le point M reste le même, le point G décrivant la droite IM qui appartient toujours au plan tangent, celui-ci pivote autour de cette droite et sa pente sur Oxy varie en raison inverse de IG (loi de Chasles). Mais ce plan a, lui aussi, deux positions limites en M et en M_0, qui

sont les plans osculateurs aux hélices correspondantes en ces points.

IV. Si nous représentons par ρ la distance du point P à un point variable sur l'hélice, les composantes X, Y, Z de l'attraction exercée par l'arc LN sur l'unité de masse placée au point P, de coordonnées x_1, y_1, z_1, sont données par

$$X = \int \mu\rho\, ds \frac{x - x_1}{\rho} = \mu \int (x - x_1)\, ds,$$
$$Y = \mu \int (y - y_1)\, ds,$$
$$Z = \mu \int (z - z_1)\, ds,$$

les intégrales étant étendues du point L au point N. Or, les coordonnées ξ, η, ζ de G satisfont aux équations

$$s\xi = \int x\, ds, \qquad s\eta = \int y\, ds, \qquad s\zeta = \int z\, ds.$$

Il vient donc

$$X = \mu s(\xi - x_1), \qquad Y = \mu s(\eta - y_1), \qquad Z = \mu s(\zeta - z_1),$$

composantes de l'attraction

$$F = -\mu s r,$$

exercée par la masse μs, concentrée en G, sur l'unité de masse placée au point P, en raison directe de la distance r; et l'on voit que cette propriété a lieu, dans les mêmes conditions, pour un arc de *courbe quelconque*.

V. On sait que le point mobile P, attiré par le point G, en raison directe de la distance r, décrit, suivant la loi des aires, dans le plan déterminé par le

point G et la vitesse initiale, une ellipse, de centre G, ayant pour diamètres conjugués : 1° la distance initiale $GL = r_0$; 2° le vecteur mené par G parallèlement à la vitesse initiale v_0 et égal à $\frac{v_0}{\sqrt{\mu s}}$ (question de cours).

Il est, au reste, bien simple d'établir ce résultat. Plaçant, dans le plan de G et de la vitesse initiale, l'origine en G, les axes étant d'une part GL, de l'autre la parallèle à la vitesse initiale, on a, comme équations différentielles du mouvement,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu s x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu s y.$$

dont, en tenant compte des conditions initiales, on peut immédiatement écrire les intégrales

$$x = r_0 \cos\sqrt{\mu s}\,t, \qquad y = \frac{v_0}{\sqrt{\mu s}} \sin\sqrt{\mu s}\,t,$$

d'où l'équation de la trajectoire

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{\mu s y^2}{v_0^2} = 1,$$

qui sera un cercle si les axes sont rectangulaires et si

$$v_0^2 = \mu s r_0^2.$$

Donc, si la vitesse initiale ayant cette valeur est dirigée, dans le plan GLN, perpendiculairement à GL, la trajectoire de P sera un cercle de centre G, décrit d'un mouvement uniforme en vertu de la loi des aires ; et ce cercle passera par le point N, car, d'après la détermination de G donnée au paragraphe I, il est évident que GL = GN.

COMPOSITION D'ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE;

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

Étant donnée la fonction $y = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$ *de la variable réelle* x *:*

I. *Étudier les variations de cette fonction, et les représenter par une courbe.*

II. *Calculer l'intégrale indéfinie* $\int y\,dx$.

III. *Soit* $F(x)$ *l'une quelconque des fonctions primitives de* y *:*

Trouver trois constantes P, Q, R *telles que la fonction*

$$\Phi(x) = F(x) - Px^2 - Qx - R\log|x|$$

reste finie lorsque x *devient infini. Et prouver qu'il n'y a qu'un seul système de valeurs des constantes* P, Q, R *satisfaisant à cette condition.*

NOTA. — *La notation* $\log|x|$ *désigne le logarithme népérien de la valeur absolue de* x.

IV. *Les constantes* P, Q, R *étant celles qui satisfont à la condition précédente, et* $F(x)$ *désignant la fonction*

$$F(x) = \int_3^x y\,dx,$$

déterminer, d'une manière précise, ce que devient la fonction $\Phi(x)$, *lorsque* x *devient infini.*

I. Pour étudier la variation de

$$y = \sqrt[3]{x^2(x-6)},$$

calculons la dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}};$$

on a alors le Tableau de variation suivant :

x.	$\frac{dy}{dx}$.	y.
$-\infty$	1	$-\infty$
	$+$	croît
0	$\frac{+\infty}{-\infty}$	0
	$-$	décroît
4	0	$-2\sqrt[3]{4}$ (min.)
	$+$	croît
$+\infty$	1	$+\infty$

La courbe représentative se déduit immédiatement de ce Tableau.

En extrayant la racine cubique de $x^3 - 6x^2$, on a

$$y = x - 2 - \frac{4}{x} + \ldots,$$

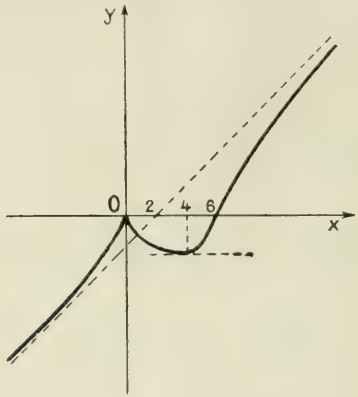
qui prouve que la courbe admet pour asymptote la droite

$$y = x - 2,$$

est au-dessus de cette asymptote pour $x = -\infty$, et au-dessous pour $x = +\infty$.

La courbe a un rebroussement à l'origine avec tan-

gente verticale; elle coupe Ox au point d'abscisse $x = 6$. Elle a la forme ci-jointe (*fig.* 4).



II. La courbe est une cubique à rebroussement, donc *unicursale*.

Posons

$$y = tx.$$

Il vient

$$x = \frac{6}{1 - t^3}.$$

L'intégrale s'écrit

$$I = \int y\,dx = \int tx\,dx = \frac{tx^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\,dt,$$

$$I = \frac{18t}{(t^3-1)^2} - 18\int \frac{dt}{(t^3-1)^2}.$$

Pour décomposer $\frac{1}{(t^3-1)^2}$ en fractions simples, désignons par α une racine cubique de l'unité et posons

$$t = \theta + \alpha,$$

$$\frac{1}{(t^3-1)^2} = \frac{1}{(\theta^3 + 3\theta^2\alpha + 3\alpha^2\theta)^2} = \frac{1}{\theta^2}\,\frac{1}{9\alpha + 18\theta + \ldots},$$

$$\frac{1}{(t^3-1)^2} = \frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\alpha^2}{9} - \frac{2\alpha}{9}\theta + \ldots\right).$$

La partie relative à la racine α est donc

$$\frac{\alpha^2}{9(t-\alpha)^2} - \frac{2\alpha}{9(t-\alpha)}.$$

Les racines étant 1, j et j^2, avec

$$1 + j + j^2 = 0,$$

on a donc, en faisant $\alpha = 1$, $\alpha = j$ et $\alpha = j^2$,

$$\frac{1}{(t^3-1)^2} = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{j^2}{(t-j)^2} + \frac{j}{(t-j^2)^2}\right]$$
$$- \frac{2}{9}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{j}{t-j} + \frac{j^2}{t-j^2}\right).$$

Par suite,

$$\int \frac{dt}{(t^3-1)^2} = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{j^2}{t-j} + \frac{j}{t-j^2}\right)$$
$$- \frac{1}{9}\log(t-1)^2 - \int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt.$$

Toutes simplifications faites, on a

$$\int \frac{dt}{(t^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\,\frac{t}{t^3-1} + \frac{1}{9}\log\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}$$
$$+ \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arc\,tang}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}.$$

On en conclut

$$1 = \frac{18t}{(t^3-1)^2} + \frac{6t}{t^3-1} - 2\log\frac{t^3-1}{(t-1)^3} - 4\sqrt{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

ou

$$\int y\,dx = \frac{xy}{2} - y + 2\log\left|\left(\frac{y}{x}-1\right)^3 x\right|$$
$$- 4\sqrt{3}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2\frac{y}{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

$$\int y\,dx = \frac{xy}{2} - y - 4\log|x| + 2\log|(y-x)^3|$$
$$- 4\sqrt{3}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2\frac{y}{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

III. Remplaçons y par les premiers termes de son développement :

$$y = x - 2 - \frac{4}{x};$$

il vient

$$\int y\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ldots - 4\log|x| + 2\log\left|\left(2 + \frac{4}{x} + \ldots\right)^3\right| - 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}\left(\frac{3 - \frac{4}{x} - \ldots}{\sqrt{3}}\right),$$

les termes négligés tendant vers zéro quand x croît indéfiniment.

On peut donc écrire

$$\int y\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 4\log|x| + \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ restant fini quand x croît indéfiniment.

On a donc

$$P = \frac{1}{2}, \qquad Q = -2, \qquad R = -4.$$

Ces valeurs de P, Q, R sont uniques, car, si l'on a

$$\int y\,dx = Px^2 + Qx + R\log|x| + \Psi(x),$$

on en déduit

$$\left(P - \frac{1}{2}\right)x^2 + (Q + 2)x + (R + 4)\log|x| = \Psi(x) - \Phi(x).$$

Le second membre restant fini, le premier membre ne peut rester fini que si l'on a séparément

$$P - \frac{1}{2} = 0, \qquad Q + 2 = 0, \qquad R + 4 = 0,$$

puisque les rapidités de croissance de x^2, x et $\log|x|$ sont différentes.

IV. On a

$$\int_3^x y\,dx = \frac{xy}{2} - y - 4\log|x| + 2\log|(y-x)^3|$$
$$- 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}\left(\frac{2\frac{y}{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{9}{2} - 3$$
$$+ 4\log 3 - 2\log 6^3 + 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ou, en remplaçant y par son développement,

$$\int_3^x y\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 4\log|x| + 6\log|2+\varepsilon|$$
$$- 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}(\sqrt{3}+\varepsilon') + \varepsilon'' + \frac{3}{2} + 4\log 3$$
$$- 6\log 6 + 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

d'où

$$\Phi(x) = 6\log|2+\varepsilon| - 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}(\sqrt{3}+\varepsilon') + \varepsilon''$$
$$+ \frac{3}{2} - 2\log 3 - 6\log 2 + 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

ε, ε', ε'' tendant vers zéro quand x croît indéfiniment, on a

$$\lim_{x=\infty}\Phi(x) = \frac{3}{2} - 2\log 3 - 2\pi\sqrt{3}.$$

CORRESPONDANCE.

M. E. Turrière. — Dans sa Note très intéressante *Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire* (p. 49), M. E. Keraval signale certaines formules comme particulièrement commodes pour l'étude de la loxodromie sphérique. Ces formules

conduisent immédiatement au théorème suivant : *La projection orthogonale sur l'équateur d'une loxodromie sphérique est une spirale de Poinsot* (¹).

Cette propriété est intéressante, puisqu'elle établit un rapport entre deux courbes remarquables. On sait que la spirale de Poinsot, qui est l'herpolhodie dans le cas de décomposition de la polhodie et qui se rencontre aussi comme trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale en raison inverse du cube de la distance au centre des forces, est :

Projection sur l'équateur des lignes géodésiques d'un ellipsoïde de révolution allongé (Halphen);

Projection horizontale de ligne de thalweg d'un paraboloïde de révolution d'axe vertical, concave vers le zénith (M. Floquet).

Le théorème qui fait l'objet de la question 2122 est un cas particulier d'un théorème plus général se rattachant aux systèmes articulés.

Je ne considérerai que le cas d'un quadrilatère ABCD circonscriptible pour lequel les points de contact des côtés avec le cercle inscrit sont sur les côtés eux-mêmes. Soient, d'autre part, quatre points α, β, γ, δ pris sur ces côtés eux-mêmes (non prolongés), α sur AB, β sur BC, γ sur CD, δ sur DA et tels que

$$A\alpha = A\delta, \qquad B\beta = B\alpha, \qquad C\gamma = C\beta, \qquad D\delta = D\gamma.$$

S'il existe un tel groupe de quatre points $\alpha\beta\delta\gamma$, il en existe une infinité, et le quadrilatère ABCD est circonscriptible.

Tous les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$ ont leurs angles res-

---

(¹) La spirale de Poinsot se rencontre dans diverses questions. Il en a été publié une bibliographie incomplète dans l'*I. M.* (question 1172).

pectivement égaux,

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \qquad \beta = \frac{B+C}{2}, \qquad \gamma = \frac{C+D}{2}, \qquad \delta = \frac{D+A}{2},$$

et sont inscriptibles.

Tel est le théorème général qui contient comme cas particulier le cas évident des points de contact des côtés de ABCD avec le cercle inscrit et le cas qui fait l'objet de la question 2122.

En d'autres termes, *il est possible de marquer sur les côtés d'un quadrilatère circonscriptible articulé une infinité* (∞^1) *de groupes de quatre points qui, lorsque le quadrilatère articulé se déforme, soient, pour chacune de ses positions, les sommets de quadrilatères inscriptibles et qui ont leurs angles respectivement égaux.*

Je reviendrai ultérieurement sur cette question dans une Note sur les systèmes articulés et sur un théorème de M. Darboux.

M. Parrod. — Relativement à la question 2093 dont la solution a paru dans le numéro de janvier 1909. — Puisque $|abc| = 1$, les cercles de diamètre AD, BE et CF passent par le point R tel que

$$\frac{R\beta}{R\gamma} = a, \qquad \frac{R\gamma}{R\alpha} = b \qquad \text{et} \qquad \frac{R\alpha}{R\beta} = c.$$

Ces cercles passent par un deuxième point R′ analogue au précédent.

Ces trois cercles sont orthogonaux au cercle O circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ et par suite la droite RR′ passe par le centre O, et l'on a

$$OR.OR' = O\alpha^2.$$

Quand la droite MNP reste tangente à une conique S

circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$, les points R et R′ décrivent l'anallagmatique correspondante; quand la conique S est remplacée par le cercle O, les deux points R et R′ sont confondus sur ce cercle.

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Grenoble.

Composition. — *Lignes de courbure d'une surface* S. *Méthode de Gauss.*

Application à la surface définie par

$$x = \sin u \sin v, \qquad y = \sin u \cos v,$$
$$z = \cos u + \log \operatorname{tang} \frac{u}{2} + f(v).$$

On montrera que l'un des systèmes, (C_1), *de lignes de courbure est composé de lignes planes, et le second,* (C_2), *de lignes sphériques. On déterminera la fonction* $f(v)$ *par la condition que les plans des courbes* (C_1) *rencontrent tous la surface* S *sous un même angle. Quelle est alors la relation entre* u *et* v *qui détermine les courbes* (C_2)?

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$(y-z)(3yz-x^2)\,dx + 2x(x^2+z^2)\,dy - 2x(x^2+y^2)\,dz = 0.$$

(Novembre 1908.)

Lille.

I. Question de Cours. — *Méthodes d'approximation dans le calcul des intégrales définies. Méthode de Cotes. Méthode de Gauss.*

II. Problème. — *On donne l'équation linéaire*

$$(1) \qquad f^2 y'' - X y' + y = 0,$$

f *désignant une fonction donnée de* x, X *une fonction à déterminer de cette même variable.*

1° *Effectuer le changement de variable* $t = \varphi(x)$, *de telle sorte que l'équation se réduise à la forme*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y = 0,$$

K *étant une constante.*

Que doit être la fonction X *pour que cette transformation soit possible? Déterminer la fonction* $\varphi(x)$ *et intégrer l'équation* (1).

2° *Déterminer* X *de telle façon qu'en multipliant par* $2y'$ *le premier membre de l'équation* (1) *on obtienne une dérivée exacte. Déduire de là l'intégrale générale de l'équation* (1).

(Novembre 1908.)

Marseille.

Épreuve théorique. — 1° *Établir entre deux constantes* α *et* k *une relation telle que l'équation*

$$(1) \qquad y = x \operatorname{tang} \alpha + kx^2$$

soit l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(2) \qquad x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x(y-h)\frac{dy}{dx} + x^2 - 4hy + 4y^2 = 0.$$

2° *Vérifier que l'enveloppe des paraboles représentées par l'équation* (1) *quand* α *varie est l'intégrale singulière de l'équation différentielle.*

3° *On fait ensuite*

$$x = t \cos \alpha,$$

de sorte que y, *tiré de l'équation* (1), *s'exprime aussi en* t.

On a ainsi une représentation paramétrique de la parabole (1) *pour une valeur donnée de* α. *Mais, si l'on considère* α *comme une fonction de* t, *soit*

$$f(\alpha, t) = 0,$$

les mêmes équations pourront représenter une courbe quelconque S. *Déterminer* $f(\alpha, t)$ *de sorte que la courbe* S *soit une trajectoire orthogonale des paraboles.*

SOLUTION.

1°

$$k = \frac{-1}{4h\cos^2\alpha}.$$

2°

$$dt\left(1 + \frac{t^2}{4h^2}\right) - d\left(\frac{t^2}{2h}\sin\alpha\right) = 0.$$

Équation immédiatement intégrable.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étudier la variation du module de la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 5}$$

sur le cercle de rayon 2 centré à l'origine.

Déduire de là des limites supérieures des modules de la fonction et de ses dérivées successives au point

$$z_1 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Ces limites croissent indéfiniment avec l'indice n de la dérivée.

(Novembre 1908.)

Montpellier.

COMPOSITION ÉCRITE. — *On a la surface*

$$z = y \operatorname{tang} x.$$

Déterminer les rayons de courbure et les centres de courbure principaux, en un point quelconque.

Déterminer les lignes asymptotiques.

Chercher le lieu des centres de courbure principaux en M, *lorsque ce point décrit une ligne asymptotique de l'un ou l'autre système.*

Pour chacune des deux courbes obtenues comme lieu des centres de courbure, calculer la longueur de l'arc de courbe compris entre deux points de coordonnées connues.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne la courbe*

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2).$$

Montrer qu'elle comprend une boucle fermée et des branches infinies. Calculer l'aire comprise dans la boucle fermée.

(Novembre 1908.)

Rennes.

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, *trouver une ligne* (L) *telle que,* A *et* B *désignant les points où une tangente variable à la ligne* (L) *rencontre* Ox *et* Oy, *on ait la relation*

$$OA + OB = a,$$

où a *est une constante donnée.*

1° *Former l'équation différentielle des lignes* (L).

2° *Calculer, pour la courbe qui correspond à l'intégrale singulière de cette équation, la longueur* s *de l'arc compté à partir du point de la courbe situé sur la droite* $y = x$.

(*On prendra pour variable le coefficient angulaire* p *de la tangente, puis l'angle* ω *de cette tangente avec la droite* $y = x$.

3° *Former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des lignes* (L). *Intégrer cette équation. Interpréter géométriquement les résultats.*

Epreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^4 \frac{d^4 y}{dx^4} + 5x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = V,$$

où

$$V = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}[6 - 10 \log x - 9(\log x)^2].$$

(Novembre 1908.)

QUESTIONS.

2135. On considère deux ellipses égales E et E_1, l'une de centre O et ayant un foyer en F, la seconde ayant son centre

en F et son foyer en O. Soient M un point quelconque sur E, P la projection de F sur la normale en M. La droite OP rencontre l'ellipse E en deux points H et H'. Pour l'un de ces points, H par exemple : 1° les distances de M et H à OF sont égales; 2° la longueur PH est constante et égale au demi-grand axe. E.-N. Barisien.

2136. On donne cinq forces, dirigées sur cinq droites fixes, et un point P. Les forces varient de façon que leur moment résultant par rapport à P soit nul : lieu de la résultante générale passant par P. M. Tétu.

2137. En désignant par p un nombre premier, par a et b deux nombres premiers entre eux, le quotient de la division de $a^p - b^p$ par $a - b$ a tous ses diviseurs premiers de la forme $P = kp + 1$, à l'exception du diviseur p qu'il admet dans l'hypothèse $a - b = \text{mult.}\, p$, dans cette hypothèse seulement, et qu'il admet alors une seule fois. (G. F.)

2138. Étant donné un point D dans le plan d'un triangle ABC, on considère une sphère variable tangente à ce plan au point D; si, par chaque côté du triangle, on mène à cette sphère un second plan tangent, le lieu du point M commun aux trois plans ainsi obtenus est la conique focale de la conique de foyer D qui est inscrite au triangle ABC. (G. F.)

2139. Soient (E) et (H) une ellipse et une hyperbole dont chacune est la focale de l'autre. Si S est un point du plan de l'hyperbole (H), par exemple, le cône de sommet S qui contient l'ellipse (E) admet comme lignes focales les tangentes menées du point S à l'hyperbole (H). (G. F.)

[K et R3a].

LES QUESTIONS DE SENS EN GÉOMÉTRIE;

PAR M. L. ZORETTI.

On sait de quelle importance est, dans les applications, notamment dans la théorie des vecteurs, la considération du sens d'un trièdre. Cette notion a été introduite avec raison au début même de l'enseignement de la Géométrie. Dans cet enseignement élémentaire il est parfaitement naturel de faire appel à la représentation concrète de ce dont on parle, et alors il n'y a pas grande difficulté à démontrer les propositions dont on a besoin. Mais il n'en est pas moins vrai que la Géométrie, science déductive, doit pouvoir établir tous ces résultats en partant des axiomes et sans jamais faire appel à l'intuition. Je me propose de montrer ici comment cela est possible pour les questions de sens d'angle plan, dièdre ou trièdre. La Géométrie de M. Hadamard donne déjà sur la question un certain nombre d'indications auxquelles il y a bien peu à ajouter.

Postulats. — Je m'appuierai sur les postulats ordinaires de la Géométrie, et notamment sur les deux que j'énonce ci-dessous :

1° Une droite partage un plan en deux régions A, B, telles que deux points de A (ou de B) peuvent toujours être joints (en ligne droite, par exemple) sans traverser la droite, et qu'au contraire toute ligne joignant un point de A à un point de B traverse la droite.

2° Un plan partage l'espace en deux régions A et B jouissant de propriétés analogues aux précédentes.

On démontre alors qu'une droite rencontre un plan en un point; ce point partage la droite en deux régions dont l'une est entièrement dans A, l'autre entièrement dans B.

Considérons maintenant un observateur, mobile de toutes façons dans l'espace autour d'un point fixe O, et essayons de nous rendre compte de l'indétermination de sa position. Nous pouvons d'abord faire coïncider avec une droite $z'Oz$ quelconque une droite fixée à l'observateur et allant de la tête aux pieds, et cela de façon que z' soit du côté des pieds et z du côté de la tête. Alors l'observateur ne peut plus que tourner autour de Oz. Donnons-nous une autre droite $x'x$ passant par O; nous pourrons faire coïncider le plan de symétrie de l'observateur avec le plan zOx, et cela de deux façons différentes. Dans une seule de ces façons, les yeux seront portés du côté de Ox. Alors la position de l'observateur est entièrement déterminée. Si ses bras sont étendus en croix, l'un d'eux est dans l'une et l'autre dans l'autre des deux régions dans lesquelles le plan zOx divise l'espace.

On peut donc dire que tout observateur traîne avec lui un trièdre. Pour éviter d'avoir recours à la vision de l'espace, nous appellerons dans la suite *observateur* un trièdre de repère $Oxyz$ sur les arêtes duquel sont marqués des sens; *plan de symétrie* de l'observateur, le plan zOx; *devant* la région de l'espace limitée par yOz qui contient Ox; *droite,* la région limitée par zOx qui contient Oy. La considération de l'observateur est donc maintenant dégagée d'une façon abstraite et, par suite, elle est susceptible d'intervenir dans les raisonnements.

Sens d'un angle dans un plan. — Je vais donner

au sens d'un angle dans un plan deux définitions différentes; je montrerai ensuite qu'elles sont identiques.

Première définition. — Soit AOB un angle dans un plan P. Choisissons arbitrairement une des deux régions de l'espace limitées par P, que nous appellerons le *dessus* du plan. Menons par O la normale au plan et faisons coïncider l'arête Oz du trièdre-observateur avec la portion de cette droite située au-dessus du plan et l'arête Ox avec le premier côté de l'angle, OA. Le plan de symétrie zOx coupe donc le plan P suivant OA; OB se trouve à droite ou à gauche de l'observateur (je veux dire dans la région qui contient Oy ou dans celle qui contient Oy'). Dans l'un des deux cas, le premier, par exemple, nous dirons que l'angle a un sens direct ou positif; dans l'autre, il sera rétrograde ou négatif.

Il nous faut admettre que le déplacement d'un angle dans son plan n'altère pas son sens. C'est un postulat au même titre que l'indéformabilité des figures, je veux dire que l'hypothèse de l'existence de figures égales. On constate, en effet, si l'on essaie de démontrer cette propriété, qu'on est conduit à admettre que le déplacement d'une figure plane dans son plan est *déterminé* (d'une façon unique) quand on connaît le déplacement de deux de ses points. Il me semble plus simple d'admettre la conservation du sens et de démontrer alors la propriété que je viens de rappeler. Mais on reconnaît, en tous cas, qu'il est de toute nécessité de préciser ce point.

Deux angles symétriques par rapport à une droite sont de sens contraires. On le voit en admettant qu'on peut déplacer une figure plane dans son plan, de façon qu'une demi-droite de la figure vienne coïncider avec une demi-droite quelconque du plan. On amènera

donc l'un des angles à avoir son premier côté sur l'axe de symétrie. Pendant ce déplacement dans le plan, l'angle symétrique subit aussi un déplacement dans son plan. Or, les positions finales des deux angles sont de sens contraires, et ces sens n'ont pas été changés.

Comme conséquence, les deux angles AOB et BOA sont de sens contraires comme symétriques par rapport à leur bissectrice ([1]).

Pour comparer les sens de deux angles, on transportera l'un d'eux dans son plan, de façon à faire coïncider leur premier côté; suivant que les deux seconds côtés seront du même côté ou non par rapport au premier, les angles seront ou non de même sens.

Deuxième définition. — Plaçons l'axe Oz du trièdre suivant OA et le plan de symétrie suivant le plan de l'angle de façon que Ox soit du côté de OB par rapport à OA. Oy sera alors soit dans la région que nous aurons appelée le *dessus du plan*, soit dans l'autre; dans le premier cas, par exemple, l'angle sera dit *direct* ou *positif;* il sera rétrograde dans l'autre.

Il est essentiel de montrer que les deux définitions sont les mêmes, ou plutôt de démontrer que, *si deux angles ont même sens dans l'une des définitions, ils ont même sens dans l'autre;* il n'y aura plus alors

---

([1]) Il n'y a pas de difficulté à définir la bissectrice. On définit l'intérieur de l'angle de la façon suivante : le côté OA prolongé partage le plan en deux régions dont l'une, D, contient OB; de même OB partage le plan en deux régions dont l'une, D', contient OA. L'intérieur est la portion commune à D et D'. Il est facile de voir qu'elle existe (elle contient le segment qui joint deux points, un sur OA, l'autre sur OB) et qu'elle est d'un seul tenant. On définit la somme, la différence de deux angles, un angle plus grand qu'un autre, et pour la bissectrice on invoque la continuité (*voir* HADAMARD).

qu'à coordonner les deux définitions, mais cela n'a pas d'intérêt théorique.

Nous devrons naturellement admettre qu'on peut, sans changer le sens (deuxième définition), déplacer un angle dans son plan, et cela pour les mêmes raisons que plus haut. Rien n'empêche donc de supposer que nos deux angles ont même premier côté. S'ils sont de même sens (première définition), les seconds côtés OB et OC sont du même côté par rapport à OA. Pour définir leur sens (seconde définition), on devra donc faire coïncider les arêtes Oz et les arêtes Ox des deux trièdres : les arêtes Oy coïncideront donc.

De même, on voit que deux angles de même sens (seconde définition) ont même sens (première définition). Il en résulte que deux angles de sens contraire dans l'une des définitions sont aussi de sens contraire dans l'autre. Notamment AOB et BOA sont de sens contraire [1].

Remarquons que, si un angle se déplace et se déforme dans son plan, son sens ne peut changer que si ses deux côtés se confondent ou viennent en prolongement. On le voit en faisant encore appel à la continuité.

Soit O un point intérieur à un triangle ABC; les trois angles AOB, BOC, COA ont même sens; pour les deux premiers, on leur donnera, par exemple, OB pour premier côté. Quand O se déplace en restant intérieur au triangle, ces angles conservent un sens constant

---

[1] Il semble qu'on pourrait le démontrer directement de la façon suivante : tout angle ayant (première définition) le sens de AOB ou celui de BOA, de deux choses l'une, ou AOB et BOA sont de sens contraire (deuxième définition), ou tous les angles sont de même sens dans cette définition; mais, tandis qu'il est évident dans la première définition qu'il existe des angles ayant les deux sens, cela ne l'est pas dans la seconde, et la conclusion ne s'impose pas.

d'après ce qui précède. Supposons à la limite que O vienne en C : le premier angle AOB n'a pas changé de sens : il devient ACB; on en conclut que les trois angles ACB, BAC, CBA ou encore ABC, BCA, CAB ont même sens : c'est le sens du triangle. On définit de même le sens d'un polygone convexe.

Je n'insiste pas sur les conséquences usuelles : angles à côtés parallèles, perpendiculaires ; translations, rotations, etc.

Sens d'un dièdre. — Soit un dièdre ; précisons sa première face P, sa seconde face Q, et choisissons sur l'arête $z'z$ un sens de parcours : de z' vers z, par exemple. Coupons le dièdre $Pz'zQ$ par un plan perpendiculaire à l'arête en un point O ; la demi-droite Oz fera, par hypothèse, connaître le dessus du plan. La section du dièdre est un angle AOB (OA dans P, OB dans Q) dont on peut définir le sens, puisque le dessus du plan a été précisé. Ce sens sera celui du dièdre.

Ce sens est le même quel que soit le point O ; car, si nous nous plaçons dans la première définition, l'arête Oz du trièdre de référence coïncide avec celle du dièdre, Ox coïncide avec OA. Quand on passe du point O à un autre point O′ de $z'z$, on fait glisser la figure zOx dans son plan : le demi-plan Q d'une part (et par suite OB), la demi-droite Oy d'autre part, restent donc constamment du même côté du plan zOx. Or, dans la position finale du trièdre, il se trouve convenablement placé pour définir le sens de l'angle A′O′B′.

Si l'on change le sens positif sur $z'z$, le sens change : on le voit en prenant la seconde définition du sens. De même, si l'on échange les faces P et Q, le sens change : les deux définitions s'accordent à le montrer. Si l'on change à la fois le sens positif sur l'arête et la première

face, le sens ne change pas : $Pz'zQ$ et $Qzz'P$ sont de même sens.

Soient P', Q' les demi-plans qui prolongent P et Q. Le dièdre $P'z'zQ'$ est de même sens que $Pz'zQ$, car dans les deux cas on adopte même dessus pour le plan OAB, et deux angles opposés par le sommet sont de même sens (AOB et A'OB' sont tous deux de sens contraire à A'OB).

Sens d'un trièdre. — Soit un trièdre O.ABC; son sens sera celui du dièdre A.BO.C. Soient ABC trois points, un sur chaque arête (et non sur leur prolongement); le sens du dièdre A.BO.C est celui de l'angle ABC dans son plan, en appelant *dessus du plan* la région qui contient le point O.

Dans le plan ABC, les trois angles ABC, BCA, CAB ont même sens; donc il en est de même des trois dièdres

A.BO.C, B.CO.A, C.AO.B

et des trois trièdres

O.ABC, O.BCA, O.CAB.

Le sens n'est donc pas altéré par une permutation circulaire des arêtes.

Au contraire, l'échange de deux arêtes change le sens : en effet, à cause de la permutation circulaire, on peut supposer que ces deux arêtes sont les deux dernières, et cela revient à constater que les angles ABC et ACB sont de sens contraire.

Il est très facile *de montrer* que le déplacement conserve le sens d'un trièdre.

Sens relatif de deux vecteurs. — Soient deux vecteurs AB, CD; leur sens relatif sera celui du trièdre

A.BCD.

Pour que cette définition ait un sens, il faut qu'en permutant AB et CD le sens reste le même, c'est-à-dire que les deux trièdres

A.BCD.

C.DAB

aient même sens.

Prenons sur l'arête AC, qui est commune, un point E entre A et C (le milieu), et remarquons que le plan EBD laisse A et C de part et d'autre. Le sens du premier trièdre est celui de l'angle BED (dessus du plan défini par le point A). Pour le second, c'est le sens de l'angle DEB (dessus du plan défini par C). Donc c'est bien le même sens.

Le glissement d'un vecteur sur sa ligne d'action n'altère pas le sens ; en effet, si l'on fait glisser AB sur sa ligne d'action, le dièdre C.BA.D reste invariable : le sens positif sur son arête est le même, sa première face est toujours la même.

Supposons qu'on déplace et déforme dans l'espace la figure formée par deux vecteurs AB, CD ; la condition nécessaire et suffisante pour que le sens reste invariable, c'est que les quatre points ne soient jamais dans le même plan. Supposons, pour examiner un cas fréquent en pratique, que trois des points restent fixes : on peut toujours supposer que ce sont les trois premiers ABC. Si l'on revient, soit à la définition du sens d'un angle, soit à celle du sens d'un dièdre, on voit que le sens sera invariable tant que D ne traversera pas le plan ABC.

Remarque. — Dans les démonstrations des cas d'égalité des trièdres au moyen des trièdres supplémentaires, on ne fait pas d'ordinaire la remarque que, si les trièdres donnés sont de même sens, il en est de même de leurs suppléments. On doit donc compléter ces

démonstrations ainsi : si les suppléments sont de même sens, ils sont superposables, et alors les trièdres donnés se superposent; donc ils ont même sens; et si les suppléments sont de sens contraire, substituons à l'un son symétrique; ils deviennent de même sens, donc superposables; l'un des trièdres donnés devient superposable au symétrique de l'autre, les trièdres donnés sont donc de sens contraire.

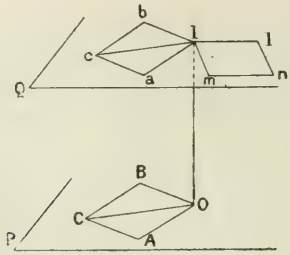
Mais on peut aller plus loin et montrer qu'un trièdre a même sens que son supplément. Soit un trièdre particulier T et son supplément T'. Tout trièdre a, ou bien le sens de T ou le sens opposé. Or, si deux trièdres ont même sens, leurs suppléments ont même sens, car on pourra faire coïncider les premiers en les déformant sans que jamais ils deviennent plans, et les suppléments viennent aussi coïncider dans les mêmes conditions. Donc, ou bien tous les trièdres ont le sens de leur supplément, ou bien tous ont le sens opposé à leur supplément. En prenant pour T un trièdre trirectangle, T' est confondu avec T; ils ont donc même sens.

Applications aux vecteurs. — Rien n'est plus facile que d'appliquer les considérations précédentes aux théorèmes sur les moments de vecteurs. Abordons, par exemple, le théorème de Varignon en nous bornant au cas de deux vecteurs OA, OB, la droite IO qui joint le centre des moments au point O étant normale au plan AOB (tout se ramène à ce cas : *voir* la *Mécanique* de M. Guichard).

Soient Il le moment de OA, Ia le vecteur équipollent à OA. Par hypothèse le sens relatif des deux vecteurs Il et OA est positif; il en est donc de même du trièdre I.lOA et, par suite aussi, du trièdre I.lOa (trois des points sont restés fixes, le quatrième A a décrit la paral-

lèle Aa au plan OIl). Le trièdre I.lOa a le sens du dièdre l.OI.a, c'est-à-dire, en appelant *dessus du plan* Q la région qui ne contient pas O, le sens de l'angle lIa et cet angle est droit. La figure Ilmn est donc déduite de Iabc par une similitude, puisque les angles lIa, mIb, nIc sont droits *et de même sens,* et

Fig. 1.



puisque les longueurs Ia, Ib, Ic sont proportionnelles à Il, Im, In : c'est le théorème de Varignon.

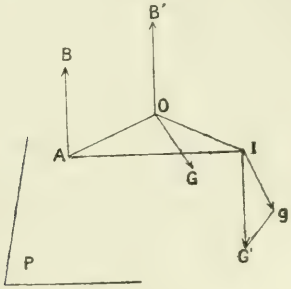
Il est de même facile de démontrer le théorème relatif au changement du centre des moments.

Supposons les deux points par rapport auxquels on prend les moments, O et I, dans un plan P perpendiculaire au vecteur AB au point A. Soient OG le moment par rapport à O, IG′ le moment par rapport à I; ils sont dans le plan P. Menons Ig équipollent à OG. Tout revient à évaluer la différence géométrique G′g des deux vecteurs Ig et IG′.

Par définition les deux vecteurs AB et OG ont un sens relatif positif; le trièdre A.BOG est donc positif, donc aussi le trièdre A.GBO qui s'en déduit par deux permutations circulaires; cela revient à dire que le dièdre G.BA.O est positif ou que son rectiligne GAO l'est en adoptant comme dessous du plan P la région qui contient le point B. Dans le triangle GAO, les

angles GAO, AOG sont de même sens; en définitive, l'angle droit AOG est positif. On peut dire aussi bien que l'angle $\widehat{OA, Ig}$ est positif, et de même l'angle $\widehat{IA, IG'}$. Les deux triangles OAI et gIG′ dérivent l'un de l'autre par une similitude, car OA et gI d'une part, IA et G′I

Fig. 2.



d'autre part, sont proportionnels et font le même angle. Donc IO et G′g font aussi ce même angle; l'angle $\widehat{IO, gG'}$ est un angle droit positif; or cela exprime que gG′ est équipollent au moment par rapport à I du vecteur OB′ équipollent à AB (en tenant compte de ce que $gG' = OI \times OB'$).

C'est bien le théorème connu

$$M_I AB = M_O . AB + M_I OB'.$$

Les deux définitions du moment par rapport à une droite ne présentent aucune difficulté, non plus que les formules des moments par rapport aux axes de coordonnées. Je rappelle que le trièdre des coordonnées doit pour ces formules être de sens positif.

Remarque. — Qu'on me permette, en terminant, une remarque au sujet de la continuité. Les *appels à*

la continuité, dont il a été question dans cette Note, se réduisent à invoquer quelques théorèmes bien élémentaires et *exacts* relatifs aux fonctions continues.

Si certains esprits se refusent à invoquer la continuité dans les raisonnements géométriques, ils devront réfléchir que la notion de ligne continue est indispensable. Or, ou bien on en fait une notion intuitive et il faut reconnaître qu'elle n'est pas claire; ou bien on veut lui donner une définition à base arithmétique, et des difficultés nombreuses apparaissent; notamment certaines propriétés de la ligne au sens vulgaire du mot cessent d'être exactes ou du moins caractéristiques.

Je remarque encore qu'on pourrait faire la théorie précédente en définissant d'abord directement le sens d'un trièdre, puis le sens d'un angle au moyen du sens d'un trièdre. La constance du sens dans un glissement de plan sur plan pourrait alors se démontrer simplement en admettant, ce qui est peut-être plus simple, que dans ce glissement les régions dessus et dessous ne s'échangent pas.

---

[060]

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES DE CERTAINES SURFACES ET SUR LES INTÉGRALES HOMOGÈNES DE L'ÉQUATION DE LAPLACE [1];

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Les axes coordonnés Ox, Oy, Oz, ce dernier ver-

[1] J'ai été amené à écrire cette Note, ainsi qu'une Note : *Une*

tical, sont rectangulaires. Les résultats établis (p. 95 des *Nouvelles Annales*, 1909) dans ma Note *Sur certains systèmes orthogonaux du plan et sur les surfaces intégrales de l'équation de Laplace* $r + t = 0$, et concernant les surfaces

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = Ar^k \sin k\theta \qquad (k \neq 1),$$

peuvent être généralisés. *Pour une surface* (V)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = Ar^k \sin k(\theta - \theta_0) \quad (k \neq 1)$$

(A, k, θ_0 étant des constantes), *les projections horizontales des lignes de niveau, des lignes de plus grande pente, des lignes asymptotiques* (constituant un réseau orthogonal en projection), *sont des spirales sinusoïdes.*

Les expressions données pour H et les déterminants D, D', D'' de Gauss, pour la courbure totale et la torsion des asymptotiques subsistent; dans les résultats, $\theta - \theta_0$ remplace θ.

D'autre part, en comparant à ma Note *Sur la conduction thermique* (*Nouvelles Annales*, 1909, p. 258), on voit que, du théorème de M. Alezais, il résulte que, *sur une surface intégrale quelconque de l'équation de Laplace* $r + t = 0$, *les lignes de plus grande pente sont déterminables sans quadrature.*

Dans ces conditions, je considère la famille à un paramètre de surfaces (V) obtenue en supposant A variable. L'équation de ces surfaces est

$$\frac{V(x, y)}{z} = \text{const.}.$$

---

application géométrique de la série considérée par Airy dans la diffraction des ouvertures circulaires, en étudiant des problèmes proposés par M. J. Clairin (préparation à l'Agrégation, Faculté de Lille).

$V(x, y)$ étant l'intégrale homogène la plus générale de l'équation de Laplace.

L'une des équations différentielles des courbes trajectoires orthogonales est précisément l'équation des projections horizontales des lignes de plus grande pente d'une surface intégrale de l'équation de Laplace; elle s'intègre donc sans signe de quadrature.

En second lieu, puisque V est homogène, les équations différentielles des trajectoires présentent une autre combinaison intégrale

$$d(x^2 + y^2 + m z^2) = 0,$$

m étant le degré d'homogénéité de V. Par suite :

Les courbes trajectoires orthogonales des surfaces (V) *sont connues sans signe de quadrature et sont tracées sur des quadriques de révolution.*

Les surfaces trajectoires orthogonales des surfaces (V) *sont connues sans signe de quadrature.*

L'équation de ces surfaces est

$$F(x^2 + y^2 + m z^2, V') = 0;$$

V' désigne la fonction de x, y qu'il faut associer à V dans le symbole $V + iV'$ pour constituer une fonction analytique.

Parmi les surfaces trajectoires orthogonales des surfaces (V) *se trouvent une infinité de quadriques de révolution concentriques et homothétiques :*

$$x^2 + y^2 + m z^2 = \text{const}.$$

Il est important de signaler, du point de vue de l'intérêt que peuvent présenter les résultats qui précèdent, que les surfaces (V) n'appartiennent point à un système triple-orthogonal.

Un tel système serait en effet constitué par les surfaces (V) et deux familles orthogonales (V_1), (V_2) de surfaces d'équations respectives

$$(V_1) \qquad x^2 + y^2 + mz^2 + 2f_1(V') = 0,$$
$$(V_2) \qquad x^2 + y^2 + mz^2 + 2f_2(V') = 0,$$

f_1 et f_2 étant des fonctions déterminées de V' contenant chacune un paramètre variable; les équations

$$f_1 = f_2,$$
$$(1-m)(x^2+y^2) - m(f_1+f_2) + mV'(f_1'+f_2') - f_1'f_2'\Delta_1 V' = 0,$$

les f' désignant les dérivées des f, seraient compatibles; par suite, le long de la courbe d'équation

$$V' = \text{const.},$$

$(1-m)(x^2+y^2)$ et $\Delta_1 V'$ seraient liés par une relation linéaire, ou, en passant aux coordonnées isotropes du plan, $(1-m)uv$ et $u^{m-1}v^{m-1}$ seraient liés par une relation linéaire.

Le cas $m = 1$ n'offrant aucun intérêt, il reste à examiner le cas $m = 2$. Les surfaces (V) sont alors des paraboloïdes homothétiques par rapport à leur sommet qui ne sauraient, par conséquent, appartenir à un système triple-orthogonal.

[O5f]

SUR UN THÉORÈME ANALOGUE AU THÉORÈME DE MEUSNIER;

PAR M. B. HOSTINSKY.

1. Soient (C) un cône quelconque et (T) son plan tangent suivant la génératrice g. Nous appellerons,

d'après Saint-Venant, *cône osculateur* relatif au plan (T) le cône de révolution (K) qui touche trois plans tangents de (C) infiniment voisins du plan (T). Quoiqu'il y ait toujours quatre cônes de révolution tangents à trois plans donnés, le cône (K) sera parfaitement déterminé; car, si les trois plans deviennent infiniment voisins, un seul de ces quatre cônes admet une figure limite non dégénérée.

Désignons par u, v, w les cosinus directeurs d'un plan et posons

$$(1) \qquad \lambda = \frac{u}{w}, \qquad \mu = \frac{v}{w}.$$

L'équation tangentielle du cône (C) aura la forme

$$(2) \qquad F(\lambda, \mu) = 0.$$

D'autre part, l'équation tangentielle générale d'un cône de révolution concentrique avec (C) sera

$$(3) \qquad (u_0\lambda + v_0\mu + w_0)^2 - \sin^2\varphi(\lambda^2 + \mu^2 + 1) = 0,$$

u_0, v_0, w_0 étant les cosinus directeurs de l'axe et φ l'angle que fait l'axe avec une génératrice.

Exprimons les conditions que le cône (3) touche trois plans tangents consécutifs du cône (2); nous aurons trois équations qui détermineront les rapports des inconnues u_0, v_0, w_0 et $\sin\varphi$ de telle manière que (3) représente le cône (K). Pour cela ajoutons à l'équation (3) les deux équations que l'on obtient en la différentiant deux fois par rapport à μ, λ étant regardé comme fonction de μ définie par l'équation (2).

En particulier, si $z = 0$ est l'équation du plan (T), c'est-à-dire si

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0.$$

on obtient, en faisant le calcul indiqué,

$$(4) \qquad u_0 : v_0 : w_0 = \lambda'^2 + 1 : -\lambda'(\lambda'^2 + 1) : \lambda'',$$

λ' et λ'' étant les valeurs des dérivées pour $\lambda = \mu = 0$.

En tenant compte de l'équation

$$u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 1,$$

on trouve pour l'angle φ la formule

$$(5) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\lambda''}{(\lambda'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Indiquons encore les propriétés suivantes du cône osculateur (K) dont la vérification n'offre aucune difficulté.

Le cône de révolution passant par trois génératrices du cône (C) infiniment voisines de g est identique avec (K).

Un plan (P), perpendiculaire à g, qui coupe (C) suivant la courbe k, rencontre g en un point M et l'axe du cône (K) au centre de courbure de k correspondant au point M.

2. Considérons maintenant une surface quelconque (S).

Soient Ox, Oy les tangentes principales en un point ordinaire O, et R_1, R_2 les rayons de courbure principaux correspondants.

L'équation de (S) s'écrit

$$(6) \qquad z = \frac{1}{2R_1} x^2 + \frac{1}{2R_2} y_2 + \ldots,$$

en négligeant les termes du troisième ordre.

Un plan représenté par

$$ux + vy + wz + p = 0,$$

l'équation tangentielle de (S) peut être mise, dans le voisinage du plan $z = 0$, sous la forme

$$(7) \qquad pw = \frac{R_1}{2} u^2 + \frac{R_2}{2} v^2 + \ldots.$$

L'équation tangentielle, de la forme (2), d'un cône (C) circonscrit à (S) et ayant pour sommet un point $A(\xi, \eta)$ du plan Oxy s'obtient en éliminant, dans l'équation (7), p au moyen de l'équation

$$(8) \qquad u\xi + v\eta + p = 0,$$

ce qui donne, en vertu de (1),

$$(9) \qquad 2\xi\lambda + 2\eta\mu + R_1\lambda^2 + R_2\mu^2 = 0.$$

Cherchons à déterminer le cône osculateur (K) relatif au plan tangent Oxy ($\lambda = 0$, $\mu = 0$) du cône (C). L'équation (9) de (C) différentiée deux fois donne, pour $\lambda = \mu = 0$,

$$(10) \qquad \xi\lambda' = -\eta, \qquad \xi\lambda'' = -R^2 - R_1\frac{\eta^2}{\xi^2}.$$

L'axe du cône (K) qui touche évidemment le plan Oxy suivant AO sera déterminé, d'après (4), par les formules

$$(11) \quad u_0 : v_0 : w_0 = \xi(\xi^2 + \eta^2) : \eta(\xi^2 + \eta^2) : -(R_2\xi^2 + R_1\eta^2);$$

il passe donc par le point $Z(0, 0, z_0)$, la troisième coordonnée étant donnée par la formule

$$z_0 = \frac{R_2\xi^2 + R_1\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Le second membre de cette formule ne dépend que du rapport $\xi : \eta$; en d'autres mots, la position du point Z sur la normale ne dépend que de la position de la droite OA : donc :

Un point quelconque de la droite OA étant pris pour sommet du cône (C) circonscrit à (S), l'axe du cône osculateur (K) relatif au plan Oxy passe toujours par le point Z.

Ce théorème est parfaitement analogue au théorème connu de Meusnier. On le voit en exprimant celui-ci comme il suit : Un plan quelconque mené par une droite fixe, tangente en O à la surface (S), coupe (S) suivant une courbe k telle que l'axe du cercle de courbure, correspondant au point O et k, passe par un point fixe de la normale Oz (centre de courbure de la section normale).

La formule (5) qui donne l'angle φ compris entre OA et l'axe du cône osculateur (K) devient, en vertu de (10),

$$\operatorname{tang}\varphi = (R_2\xi^2 + R_1\eta^2)(\xi^2+\eta^2)^{-\frac{3}{2}},$$

et la formule qui donne la courbure d'une section plane en O peut s'écrire

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{u^2}{R_2} + \frac{v^2}{R_1}\right)(u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}},$$

u et v étant les cosinus d'angles que fait la normale du plan sécant avec les axes Ox et Oy.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1909.

Composition de Mathématiques (Sciences I).

Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère l'hyperbole (H) *ayant pour équation*

$$x^2 - y^2 = r^2$$

et les coniques (T) *représentées par l'équation*

$$x^2 + 3y^2 + 6rty - 3r^2 = 0,$$

où t est un paramètre variable.

1° *Montrer qu'en leurs quatre points d'intersection* A, B, C, D *une courbe* (T) *et la conique* (H) *sont orthogonales.*

2° *Étudier les cercles passant par* A, B, C, D. *Lieu des foyers des coniques* (T).

3° *Trouver l'enveloppe des droites* AB. *Exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre les coefficients de l'équation générale d'une de ces droites (non parallèle à* Ox).

4° *Lieu du point de contact d'une conique* (T) *et d'une conique ayant mêmes foyers que* (H).

5° *Un champ de forces, dont les forces sont parallèles au plan* xOy, *est tel que les traces des surfaces de niveau sur ce plan soient les coniques* (T). *Trouver les lignes de forces situées dans le plan* xOy. *Indiquer la forme et la disposition de ces lignes, les unes par rapport aux autres.*

6° *On considère un point* E *de coordonnées* $x = 0$, $y = l$ *et celles des lignes de force qui coupent* Ox *en trois points réels* M_1, M_2, M_3. *Calculer la somme*

$$\frac{1}{\overline{EM_1}^2} + \frac{1}{\overline{EM_2}^2} + \frac{1}{\overline{EM_3}^2}.$$

Peut-on trouver une valeur réelle l, *telle que cette somme reste constante lorsque la ligne de force varie?*

SOLUTION

Par Jean Servais.

1° Si l'on pose

$$f(x, y) \equiv x^2 - y^2 - r^2,$$
$$g(x, y) \equiv x^2 + 3y^2 + 6rty - 3r^2,$$

on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$
$$\equiv 2x^2 - 6y^2 - 6rty \equiv 3f(x, y) - g(x, y),$$

ce qui prouve que pour tout point commun aux deux courbes, dont, par suite, les coordonnées annulent à la fois $f(x, y)$ et $g(x, y)$, la condition d'orthogonalité est vérifiée.

2° Le cercle passant par les quatre points d'intersection de (T) et (H) a pour équation

$$f(xy) + g(xy) \equiv 2x^2 + 2y^2 + 6rty - 4r^2 = 0.$$

Quand t varie on a là l'équation générale des cercles passant par les foyers de l'hyperbole (H).

L'équation de la conique (T) s'écrit

$$\frac{x^2}{3r^2(1 - t^2)} + \frac{(y + rt)^2}{r^2(1 - t^2)} - 1 = 0.$$

Sous cette forme on voit immédiatement que les

coordonnées x et y des foyers réels vérifient les équations

$$y + rt = 0,$$
$$x^2 = 2r^2(1 - t^2).$$

Le lieu des foyers est donc l'hyperbole

$$x^2 - 2y^2 = 2r^2,$$

qui a pour sommets de l'axe transverse les foyers de (H).

3° Les sécantes communes aux deux coniques (H) et (T) ont pour équation

$$(1) \quad \begin{cases} g(x, y) + \lambda f(x, y) \\ \quad \equiv (1 + \lambda)x^2 + (3 - \lambda)y^2 + 6rty - (3 + \lambda)r^2 = 0, \end{cases}$$

où λ est racine de l'équation

$$\Delta(\lambda) \equiv r^2(1 + \lambda)[\lambda^2 - 9(1 + t^2)] = 0.$$

A la racine $\lambda = -1$ correspondent les cordes parallèles à Ox. Les cordes non parallèles à Ox sont fournies par

$$(2) \qquad \lambda^2 - 9t^2 - 9 = 0.$$

Si nous exprimons λ et t, vérifiant l'équation (2), en fonction d'un paramètre, nous aurons, en posant, par exemple,

$$\lambda = 3t + \theta,$$

les expressions

$$t = \frac{9 - \theta^2}{6\theta},$$

$$\lambda = \frac{9 + \theta^2}{2\theta}.$$

Et l'équation (1) s'écrit

$$(\theta^2 + 2\theta + 9)x^2 - [(\theta - 3)y + (\theta + 3)r]^2 = 0.$$

Une des droites AB a donc pour équation

$$(3) \qquad ux + (\theta - 3)y + (\theta + 3)r = 0,$$

en posant

$$(4) \qquad u^2 = \theta^2 + 2\theta + 9.$$

Il suffit donc d'exprimer u et θ en fonctions rationnelles d'un paramètre. Posons, à cet effet,

$$u = \theta + \alpha,$$

et la relation (4) donne

$$\theta = \frac{9 - \alpha^2}{2(\alpha - 1)},$$

$$u = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 9}{2(\alpha - 1)}.$$

En portant ces valeurs de θ et u dans l'équation (3), elle s'écrit

$$\alpha^2(x - y - r) - 2\alpha(x + 3y - 3r) + 9x + 15y + 3r = 0.$$

L'enveloppe de cette droite, quand α varie, est l'hyperbole

$$(x + 3y - 3r)^2 - (x - y - r)(9x + 15y - 3r) = 0$$

ou, en développant et simplifiant,

$$2x^2 - 6y^2 - 3r^2 = 0.$$

4° Les coniques homofocales à (H) ont pour équation

$$(5) \qquad \frac{x^2}{\lambda + r^2} + \frac{y^2}{\lambda - r^2} - 1 = 0.$$

L'équation aux y des points d'intersection de cette

conique et de la conique (T) est

$$\frac{-3y^2-6rty+3r^2}{\lambda+r^2}+\frac{y^2}{\lambda-r^2}-1=0,$$

ou, en développant,

$$(6)\quad 2(\lambda-2r^2)y^2+6rt(\lambda-r^2)y+(\lambda-r^2)(\lambda-2r^2)=0.$$

Pour que les coniques soient tangentes, il faut et il suffit ($y\neq 0$) que cette équation ait une racine double. Elles sont d'ailleurs alors *bitangentes*. Ceci donne

$$9r^2t^2(\lambda-r^2)^2-2(\lambda-r^2)(\lambda-2r^2)^2=0.$$

En supprimant la solution étrangère $\lambda=r^2$, il reste la relation

$$9r^2t^2(\lambda-r^2)-2(\lambda-2r^2)^2=0,$$

d'où

$$3rt=\pm\frac{\sqrt{2}(\lambda-2r^2)}{\sqrt{\lambda-r^2}}.$$

En portant cette valeur de t dans l'équation (6), elle s'écrit

$$(\sqrt{2}y\mp\sqrt{\lambda-r^2})^2=0.$$

L'élimination de λ entre l'équation (5) et l'équation précédente donne le lieu cherché

$$x^2-y^2-r^2=0.$$

C'est l'hyperbole (H).

Ce résultat était facile à prévoir. Si, en effet, M et N sont deux points d'intersection de l'ellipse (T) avec l'hyperbole (H), symétriques par rapport à Oy, il existe une ellipse (E), homofocale à (H), et une seule, passant par M et N.

Les ellipses (T) et (E) sont *toutes deux*, aux points M et N, orthogonales à (H); elles sont donc tangentes entre elles en ces points.

A chaque ellipse (T) correspondent ainsi *deux* ellipses (E), homofocales à (H) et bitangentes à (T). Le lieu des points de contact M et N est l'hyperbole (H).

5° Soit U la fonction de forces. Comme les forces sont parallèles au plan xOy, on a

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

La fonction U ne dépend donc que de x et y.

Les surfaces de niveau sont donc des cylindres, et les lignes de force sont les trajectoires orthogonales des sections droites de ces cylindres.

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales des ellipses (T) est

$$2xy\frac{dy}{dx} = 3y^2 - x^2 + 3r^2,$$

ou

$$x\frac{d(y^2)}{dx} - 3y^2 = 3r^2 - x^2,$$

équation *linéaire* en y^2.

En intégrant par le procédé classique, on trouve

$$(7) \qquad y^2 = hx^3 + x^2 - r^2,$$

où h désigne une constante arbitraire.

La forme de la courbe (7) dépend du nombre des racines réelles de l'équation

$$(8) \qquad hx^3 + x^2 - r^2 = 0.$$

1° Si $h^2 < \frac{4}{27r^2}$, l'équation a trois racines réelles x_1, x_2, x_3 et l'on a

$$y^2 = h(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

La courbe coupe l'axe Ox en trois points réels M_1, M_2, M_3.

Si, par exemple, h est positif, il y a une racine positive x_1, comprise entre r et $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ et deux racines négatives séparées par $-r\sqrt{3}$,

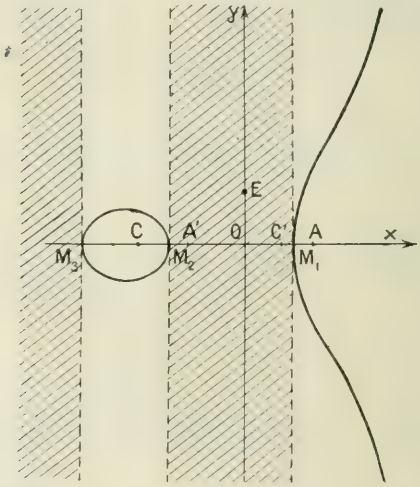
$$x_3 < -r\sqrt{3} < x_2 < 0 < \frac{r\sqrt{3}}{2} < x_1 < r.$$

y n'est réelle que si

$$x > x_1 \qquad \text{ou} \qquad x_3 < x < x_2.$$

La courbe (*fig.* 1), symétrique par rapport à Ox, se

Fig. 1.



compose d'une ovale M_3M_2 et d'une branche infinie à branches paraboliques M_1.

2° Si $h^2 > \frac{4}{27r^2}$, il n'y a plus qu'une seule racine réelle de l'équation (8).

La courbe a la forme de celle de la figure 1 dans laquelle on supprime l'ovale.

Pour étudier les dispositions des courbes (7) lorsque h varie, remarquons d'abord que deux courbes, correspondantes aux valeurs h et h' de la constante, ne se coupent pas en des points réels, car l'équation aux x des points d'intersection est $x = 0$, qui donne des valeurs imaginaires de y.

Si l'on considère les racines de l'équation (8) comme fonction de h, on a, pour l'une de ces racines,

$$\frac{dx}{dh} = -\frac{x^2}{3hx - 2}.$$

Supposons $h > 0$:

La racine positive x_1 est toujours *décroissante* avec h.

Les racines négatives x_2 et x_3 ne sont réelles que si

$$h < \frac{2}{3r\sqrt{3}},$$

et, dans ce cas, il est facile de vérifier que $-\frac{2}{3h}$ est compris entre x_2 et x_3, de telle sorte que

$$\frac{dx_2}{dh} = -\frac{x_2^2}{3hx_2 - 2} < 0, \qquad \frac{dx_3}{dh} = -\frac{x_3^2}{3hx_3 - 2} > 0.$$

En résumé, si h croît de 0 à $\frac{2}{3r\sqrt{3}}$,

x_1 *décroît* de r à $\frac{r\sqrt{3}}{2}$,

x_2 *décroît* de $-r$ à $-r\sqrt{3}$,

x_3 *croît* de $-\infty$ à $-r\sqrt{3}$.

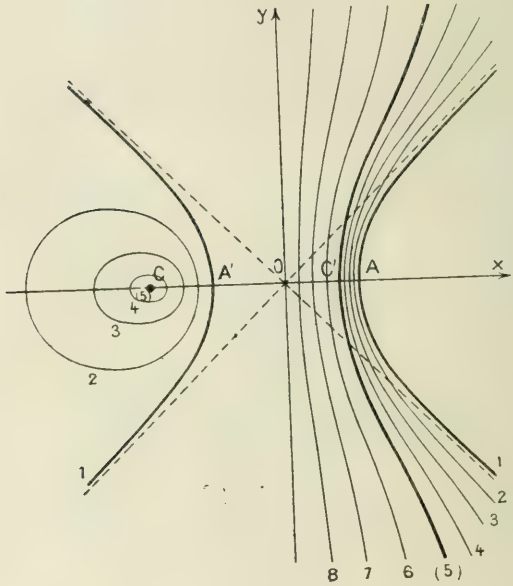
L'ovale M_2M_3 diminue, et, quand $h = \frac{2}{3r\sqrt{3}}$, cette ovale se réduit à un point.

Quand h continue à croître de $\frac{2}{3r\sqrt{3}}$ à $+\infty$, l'ovale disparaît et x_1 *décroît* de $\frac{2}{r\sqrt{3}}$ à o.

La figure 2 indique les courbes successives obtenues quand h croît de o à $+\infty$.

Pour $h = 0$, on a l'hyperbole H : (1);

Fig. 2.



Quand h croît de o à $\frac{2}{3r\sqrt{3}}$, on a les courbes successives (2), (3), (4);

Pour $h = \frac{2}{3r\sqrt{3}}$ on a la courbe (5), l'ovale étant réduite au point C;

Enfin, h croissant de $\frac{2}{3r\sqrt{3}}$ à $+\infty$, on a les courbes

sans ovale (6), (7), (8) qui s'aplatissent sur Oy et tendent à se confondre avec Oy.

Lorsque h est négatif, on a les courbes symétriques de celles-ci par rapport à Oy.

6° Soient M l'un des points M_1, M_2, M_3, et x son abscisse. On a

$$\overline{EM}^2 = x^2 + l^2.$$

Posons

$$x^2 + l^2 = \frac{1}{z}, \tag{9}$$

et formons l'équation en z.

L'équation (8) s'écrit

$$(hx + 1)\left(\frac{1}{z} - l^2\right) - r^2 = 0;$$

on en tire

$$x = \frac{(r^2 + l^2)z - 1}{h(1 - l^2 z)}.$$

En portant dans l'équation (9), il vient

$$\frac{[(r^2 + l^2)z - 1]^2}{h^2(1 - l^2 z)^2} + l^2 = \frac{1}{z},$$

ou

$$[(r^2 - l^2)z - 1]^2 z + (l^2 z - 1)^3 h^2 = 0.$$

ou encore

$$[(r^2 + l^2)^2 + l^6 h^2]z^3 - [2(r^2 + l^2) + 3l^4 h^2]z^2 + \ldots = 0.$$

La somme S des racines de cette équation est

$$S = \frac{3l^4 h^2 + 2(r^2 + l^2)}{l^6 h^2 + (r^2 + l^2)^2}.$$

Pour que S reste constante quand h varie, il faudrait que l'on ait ($l \neq 0$)

$$\frac{3l^4}{l^6} = \frac{2(r^2 + l^2)}{(r^2 + l^2)^2}$$

ou

$$3(r^2 + l^2) = 2l^2,$$

égalité qui n'est pas vérifiée pour des valeurs réelles de l. Le seul cas où S est indépendant de h est donc celui où $l = 0$, et alors

$$S = \frac{2}{r^2}.$$

Composition de Mathématiques

(Sciences I et II).

PREMIÈRE QUESTION.

On laisse tomber, sans vitesse initiale, un point matériel pesant dont la masse est 1^g *dans un milieu qui oppose à son mouvement une résistance proportionnelle à la vitesse; soit k le coefficient de proportionnalité; on compte le temps à partir du moment où le mouvement commence.*

I. *Quels sont, au bout du temps t, la vitesse de ce mobile et le chemin z qu'il a parcouru? Vérifier, sur les formules trouvées, que, lorsque k est très petit, le mouvement est, pendant quelque temps, à peu près le même que si le mobile tombait dans le vide.*

II. *On laisse tomber au même instant plusieurs points matériels pesants, ayant chacun une masse égale à* 1^g, *dans des milieux divers qui opposent tous une résistance proportionnelle à la vitesse, mais avec des coefficients k différents; on compare les mouvements de ces points au bout du temps t. Il est aisé de prévoir, d'après la nature même de la question, dans quel sens varient la vitesse et le*

chemin parcouru lorsque k augmente. Vérifier analytiquement ces prévisions.

III. *Calculer le coefficient k par la condition suivante : Le point matériel, pour tomber sans vitesse initiale d'une hauteur égale à 2^g, met un dixième de seconde de plus que s'il tombait dans le vide.*

On prendra $g = 981^{cm}$ et l'on se bornera à calculer le premier chiffre significatif de k.

DEUXIÈME QUESTION.

On considère l'équation différentielle

$$y' + Py + Q = 0, \tag{1}$$

où y est la fonction inconnue et où P, Q sont des fonctions de la variable x.

I. *Montrer que toute solution de cette équation vérifie l'équation différentielle*

$$y'' + (P' - P^2)y + Q' - PQ = 0 \tag{2}$$

(y' et y'' désignent les dérivées première et seconde de y, P' et Q' les dérivées de P et de Q).

II. *Déterminer P et Q de façon que l'on ait, en désignant par α et β des constantes données,*

$$P' - P^2 = \alpha^2, \qquad Q' - PQ = \beta.$$

III. *En adoptant pour P, Q les fonctions ainsi trouvées, on intégrera les deux équations (1) et (2) et l'on calculera ce que devient le premier membre de l'équation (1) quand on y remplacera y par la solution générale de l'équation (2).*

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

PREMIÈRE QUESTION. — Le point décrit une verticale sur laquelle nous comptons positivement les z vers le bas, à partir du point de départ.

L'équation du mouvement est alors

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - k\frac{dz}{dt}.$$

I. En intégrant cette équation et déterminant les constantes de façon que, pour $t = 0$, z et $\frac{dz}{dt}$ s'annulent, on trouve

$$z = \frac{g}{k^2}(e^{-kt} + kt - 1),$$

$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}).$$

En développant l'exponentielle en série, on a

$$(1) \qquad z = g\left(\frac{t^2}{2} - \frac{kt^3}{3!} + \frac{k^2 t^4}{4!} - \ldots\right),$$

ce qui prouve que, lorsque k est très petit, ainsi que t, z diffère très peu de $\frac{1}{2}gt^2$.

II. Donnons à t une valeur fixe et étudions les variations de z et v avec k.

On a

$$\frac{\partial z}{\partial k} = -\frac{g}{k^3}[e^{-kt}(kt + 2) + kt - 2],$$

$$\frac{\partial v}{\partial k} = -\frac{g}{k}[1 - e^{-kt}(1 + kt)].$$

Posons

$$kt = u,$$

$$f(u) = e^{-u}(u+2) + u - 2;$$

on a

$$f'(u) = 1 - e^{-u}(1+u)$$

et, par suite, on peut écrire

$$\frac{\partial z}{\partial k} = -\frac{g}{k^3} f(u),$$

$$\frac{\partial v}{\partial k} = -\frac{g}{k^2} f'(u).$$

$f(u)$ et $f'(u)$ sont positifs lorsque u est positif.

En effet, on a

$$f''(u) = u e^{-u}.$$

$f''(u)$ étant positif avec u, $f'(u)$ croît et, comme $f'(0) = 0$, $f'(u)$ croît à partir de zéro, donc est positif.

$f'(u)$ étant positif, comme $f(o) = 0$, $f(u)$ croît également à partir de zéro et est positif.

z et v décroissent donc tous deux lorsque k croît, ce qui était évident.

III. En chute libre, il faut, dans le vide, 2 secondes à un mobile pour tomber de $2g$.

Si le mobile tombe de la hauteur $2g$ en 2,1 secondes, on aura, en vertu de l'équation développée (1),

$$2g = g\left[\frac{(2,1)^2}{2} - \frac{k(2,1)^3}{6} + \frac{k^2(2,1)^4}{24} - \ldots\right]$$

ou

$$2 = \frac{(2,1)^2}{2} - \frac{k(2,1)^3}{6} + \frac{k^2(2,1)^4}{24} - \ldots;$$

on aura une valeur approchée de k en limitant la série

au second terme :

$$2 = 2,2 - 1,5k,$$

$$k = \frac{0,2}{1,5} = 0,1.$$

Deuxième question. — I. Toute fonction y vérifiant l'équation

$$(2) \qquad y' + Py + Q = 0$$

vérifie l'équation obtenue par dérivation

$$(3) \qquad y'' + Py' + P'y + Q' = 0$$

et, par suite, celle obtenue en éliminant y' entre (2) et (3) :

$$(4) \qquad y'' + (P' - P^2)y + Q' - PQ = 0.$$

II. Si l'on a

$$P' - P^2 = \alpha^2,$$

on a

$$\frac{dP}{\alpha^2 + P^2} = dx,$$

ou, en intégrant,

$$\text{arc tang}\,\frac{P}{\alpha} = \alpha x + \alpha',$$

$$P = \alpha\,\text{tang}(\alpha x + \alpha').$$

On a ensuite

$$Q' - \alpha\,\text{tang}(\alpha x + \alpha')Q = \beta,$$

dont l'intégrale obtenue par la méthode classique de l'équation différentielle linéaire est

$$Q = \frac{\beta}{\alpha}\,\text{tang}(\alpha x + \alpha') + \frac{\beta'}{\cos(\alpha x + \alpha')},$$

α' et β' étant deux nouvelles constantes.

III. Les équations (2) et (4) s'écrivent alors

$$(2)\quad y' - \alpha \operatorname{tang}(\alpha x + \alpha')\left(y - \frac{\beta}{\alpha^2}\right) - \frac{\beta'}{\cos(\alpha x + \alpha')} = 0,$$

$$(4)\quad y'' - \alpha^2 y - \beta = 0.$$

L'équation (2) est une équation linéaire du premier ordre en $y + \frac{\beta}{\alpha^2}$ dont l'intégrale générale est

$$(5)\quad y = A\cos(\alpha x + \alpha') - \frac{\beta'}{\alpha}\sin(\alpha x + \alpha') - \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

L'équation (4) est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'intégrale générale est

$$(6)\quad y = B\cos\alpha x + C\sin\alpha x - \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Portons cette intégrale dans le premier membre de l'équation (2) et ce premier membre devient, toutes simplifications faites,

$$\alpha\frac{B\sin\alpha' + C\cos\alpha' - \frac{\beta'}{\alpha}}{\cos(\alpha x + \alpha')}.$$

On obtient les intégrales particulières de (4) qui vérifient l'équation (2) en choisissant B et C de façon que

$$B\sin\alpha' - C\cos\alpha' - \frac{\beta'}{\alpha} = 0.$$

On retrouve l'intégrale sous la forme (5) en vérifiant cette relation linéaire de la façon suivante

$$B = A\cos\alpha' - \frac{\beta'}{\alpha}\sin\alpha',$$

$$C = -A\sin\alpha' - \frac{\beta'}{\alpha}\cos\alpha',$$

A étant une constante arbitraire.

Composition de Mathématiques.

(Lettres : C.)

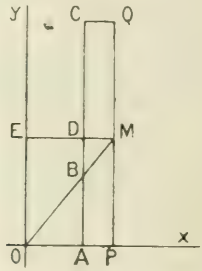
On considère un système d'axes rectangulaires Ox, Oy *et l'on prend sur la partie positive de l'axe* Ox *un point* A *dont la distance au point* O *soit égale à l'unité de longueur (fig. 3).*

On désignera par (S) *la courbe qui représente la fonction* $y = x^3$.

Soit M *un point de cette courbe et soit* $x = OP$ *l'abscisse de ce point qu'on supposera positive.*

Par le point M *on mène une parallèle à l'axe* Ox :

Fig. 3.



soient E *et* D *les points où elle rencontre l'axe* Oy *et la parallèle à cet axe menée par le point* A ; *soit* B *le point d'intersection des droites* AD *et* OM ; *on prend sur* AD *un point* C *tel que* AC *et* AB *soient de même sens et qu'on ait* $AC = 3AB$. *Soit enfin* Q *le point où la parallèle à l'axe* Ox *menée par le point* C *rencontre la parallèle à* Oy *menée par le point* M.

On évaluera au moyen de x le vecteur MQ *regardé comme positif ou négatif suivant que* Q *est au-dessus ou au-dessous de* M *et l'on étudiera la façon dont varie la fonction ainsi trouvée quand x croît de* 0 *à* $+\infty$.

Dans les mêmes conditions, le point M *décrit la courbe* (S) *et le point* Q *une courbe correspondante* (S′); *démontrer que l'aire comprise entre cette dernière courbe, l'axe* Ox *et l'ordonnée* PQ *du point* Q *est égale à l'aire du rectangle* OADE.

Les courbes (S) *et* (S′) *se coupent au point* O *et en un point* K *dont on calculera les coordonnées; évaluer l'aire comprise entre les arcs des courbes* (S) *et* (S′) *qui vont du point* O *au point* K.

SOLUTION.

On a

$$\overline{AB} = \frac{y}{x} = x^2, \qquad \overline{AC} = 3x^2,$$

$$u = \overline{MQ} = 3x^2 - x^3 = x^2(3 - x),$$

$$\frac{du}{dx} = 3x(2 - x).$$

Quand x croît de 0 à 2, u croît de 0 à 4 et atteint un maximum pour $x = 2$. Ensuite u décroît de 4 à $-\infty$ en passant par zéro pour $x = 3$.

La courbe (S) est une parabole cubique, (S′) est une parabole, et l'ordonnée de (S′) est la *dérivée* de celle de (S). L'aire en question est égale à

$$\int_0^x 3x^2\,dx = x^3 = MP = OA \times DA.$$

La courbe (S′) (puisque $\overline{MQ} > 0$) est au-dessus de la courbe (S) quand x varie de 0 à 3. Les deux courbes

se coupent en $x = 3$ (MQ = 0). L'aire comprise entre (S) et (S') est donc

$$\int_0^2 (3x^2 - x^3)\,dx = \left| x^3 - \frac{x^4}{4} \right|_0^3 = \frac{27}{4}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

La Geometrio folietara, par *René de Saussure*. 1re Partie. Genève, 1909.

Les *Nouvelles Annales* saluent toujours avec plaisir l'apparition d'un Ouvrage mathématique en Esperanto. Nous avons déjà signalé à diverses reprises l'intérêt que présente pour la Science la langue du Dr Zamenhof. Que tous les savants n'aient pas accepté d'enthousiasme le merveilleux moyen de communication qui leur était offert, cela serait inexplicable si l'on ne songeait à la méfiance de la nouveauté, à l'inertie qui paralysent l'humanité et dont peuvent être victimes même les esprits les plus distingués.

Mais ce n'est pas le lieu de plaider, une fois de plus, la cause de la langue internationale. Le travail dont M. de Saussure publie la première Partie a d'autres mérites que d'être écrit en Esperanto. Il vaut encore et surtout par le fond. C'est une exposition de la Géométrie cinématique, faite à un point de vue très original et du plus haut intérêt.

En Géométrie projective, on considère comme éléments essentiels le point, la droite et le plan. Ces trois figures ont cela de commun qu'elles n'ont pas de paramètre de grandeur. Autrement dit, toute figure semblable à un point est un point indiscernable du premier. De même, pour un plan ou une droite. Mais ces figures ne sont pas les seules qui jouissent de cette propriété. Il y a encore, en se bornant aux êtres à trois dimensions, les suivantes, pour lesquelles M. de Saussure

a choisi les noms imagés suivants, que je traduis de l'Esperanto :

La *Flèche,* constituée par une droite et un point marqué dessus ;

Le *Bouclier,* constitué par un plan et un point y contenu ;

Le *Drapeau,* constitué par un plan et une droite y contenue ;

Le *Feuillet,* constitué par un plan, une droite y contenue et un point marqué sur la droite.

En réalité et pour plus de précision, la droite d'une flèche est remplacée par une demi-droite, le plan d'un bouclier, d'un drapeau ou d'un feuillet, par un demi-plan.

M. de Saussure s'est proposé d'étudier systématiquement les Géométries dont l'élément fondamental est la flèche, le bouclier, le drapeau ou le feuillet. L'ensemble de ces doctrines forme la *Géométrie des feuillets* qui, indépendamment de son intérêt propre, a des applications immédiates et importantes à la Géométrie cinématique. On voit tout de suite, par exemple, que la position d'une figure plane mobile dans son plan est déterminée par celle d'une seule flèche liée à cette figure. De même, la position d'un corps solide mobile dans l'espace est déterminée par celle d'un seul feuillet lié à ce corps.

La première Partie du travail, réunion d'une série d'articles publiés en 1908-1909 dans le journal *Internacia Scienca Revuo,* concerne la Géométrie plane des flèches et la Géométrie corrélative des drapeaux dans l'espace autour d'un point.

Une flèche est définie dans le plan, on le voit tout de suite, par trois coordonnées, qui sont les deux coordonnées cartésiennes de son origine et l'angle qu'elle fait avec une direction fixe. Un ensemble continu de flèches peut donc être à 1, 2 ou 3 paramètres (étant constitué dans ce dernier cas par l'ensemble des flèches du plan). Aux ensembles à 1 et 2 paramètres correspondent les déplacements d'une figure plane, à 1 ou 2 paramètres. Nous appellerons de tels ensembles des *séries* de flèches.

Quelles sont les séries de flèches dont le rôle est fondamental? La réponse à cette question n'était nullement évidente, et il a fallu une véritable sagacité pour la trouver. La série fondamentale à un paramètre est constituée par l'ensemble des positions d'une flèche tournant autour d'un point fixe; la série fondamentale à deux paramètres est constituée par

l'ensemble des positions d'une flèche qui reste symétrique d'une flèche fixe par rapport à une droite variable. On donne à ces séries fondamentales les noms respectifs de *couronne* et de *couronoïde*.

Cela posé, on démontre un certain nombre de théorèmes tels que ceux-ci : par deux flèches, il passe une couronne et une seule ; par trois flèches, il passe un couronoïde et un seul ; deux couronoïdes ont en commun une couronne ; trois couronoïdes ont en commun une flèche, etc. Autrement dit, *les flèches, les couronnes et les couronoïdes ont entre eux exactement les mêmes relations que les points, les droites et les points de l'espace*. La Géométrie des flèches se présente donc comme une interprétation nouvelle de la Géométrie projective de l'espace. On peut, d'ailleurs, imaginer une représentation analytique des flèches qui met en évidence ce remarquable résultat.

Appliquant ces résultats à la Géométrie cinématique plane, on trouve que le déplacement fondamental à un paramètre est la rotation autour d'un point, ce que l'on savait déjà, et que le déplacement fondamental à deux paramètres est celui d'une figure qui reste symétrique d'une figure fixe par rapport à une droite variable, théorème beaucoup plus caché que le premier.

M. de Saussure montre ensuite que la Géométrie des flèches s'applique utilement à la Physique, à la Météorologie, etc. Si, par exemple, on représente sur une Carte géographique la direction du vent en chaque point, à un moment donné on formera une série de flèches à deux paramètres et, par l'application des théorèmes précédemment établis, on pourra mettre en évidence les *lignes de flux* du vent, les cyclones, etc.

La Géométrie des drapeaux autour d'un point, toute semblable à celle des flèches dont elle est la corrélative, a aussi des applications physiques et météorologiques, outre son interprétation cinématique.

Espérons que la suite du travail, où doivent être étudiées les Géométries plus compliquées des boucliers et des feuillets, ne se fera pas longtemps attendre.

Nous serons heureux d'en rendre compte.

R. Bricard.

CORRESPONDANCE.

M. **Hilaire**. — La Note de M. Barisien (1909, p. 326) me remet en mémoire une propriété géométrique intéressante : si l'on projette le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle isoscèle sur les axes de toutes les paraboles inscrites dans le triangle, le lieu des projections est un *bifolium*.

La recherche de ce lieu était une partie du problème proposé en 1869 pour l'admission à l'École Polytechnique. J'ai donné une solution dans les *Nouvelles Annales* (1869, p. 381 et suiv.); j'avais obtenu directement une équation rationnelle en coordonnées cartésiennes et j'avais remarqué, comme M. Barisien, qu'en passant aux coordonnées polaires, on arrivait à une construction facile (p. 384).

M. **E.-N. Barisien**. — M. H. Brocard vient de m'aviser que les remarques concernant la courbe

$$y = \sqrt{ax} - \sqrt{ax - x^2},$$

qui sont mentionnées à l'article *Correspondance* (*N. A.*, 1909, p. 326), ont déjà été faites par M. G. de Longchamps sous le pseudonyme d'*Elgé* (*J. s. de Longchamps*. 1896, p. 73-75).

Ceci montre une fois de plus combien il est difficile d'être assuré qu'une idée mathématique n'a pas déjà été exposée. En tous cas, je tiens à rappeler la priorité du regretté de Longchamps, en rendant à César ce qui est à César.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1909).

Sujets des compositions.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

On donne deux cercles, de centres O *et* O′, *de rayons* R *et* R′; *ces deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, et l'on mène les tangentes communes extérieures dont les points de contact sont* A *et* A′, B *et* B′, *ainsi que les tangentes communes intérieures dont les points de contact sont* C *et* C′, D *et* D′, *les points* A *et* C *étant de part et d'autre de la ligne des centres, tandis que le contraire a lieu pour les points* A′ *et* C′, *si l'on a, comme on le suppose,* $R < R'$. *Les tangentes* AA′ *et* CC′ *se coupent en* E, *les tangentes* BB′ *et* DD′ *se coupent en* F, *et la droite* EF *rencontre la droite* OO′ *au point* G; *les tangentes* AA′ *et* DD′ *se coupent en* I, *les tangentes* BB′ *et* CC′ *se coupent en* J, *et la droite* IJ *rencontre la droite* OO′ *au point* K. *On considère les droites* AC, BD *et* A′C′, B′D′, *qui se croisent au point* K.

1° *Pour que les droites* AC *et* B′D′ *se confondent en une même droite r, auquel cas les droites* BD *et* A′C′ *se confondent en une même droite s, il faut et il suffit que les cercles orthoptiques des deux cercles donnés soient orthogonaux, ce qui équivaut à la relation métrique*

$$\overline{OO'}^2 = 2(R^2 - R'^2).$$

(*On appelle* cercle orthoptique d'un cercle *le cercle qui est le lieu des points d'où l'on voit le cercle donné sous un angle droit.*)

Le point G *est alors le milieu du segment* OO′.

La condition précédente est supposée remplie dans tout ce qui suit.

2° *Si* R *est un point de la droite r, les polaires de ce point par rapport aux deux cercles* O *et* O′ *se coupent en un point* S *situé sur la droite s*;

3° *L'enveloppe de la droite* RS *est une conique, qu'on déterminera par des éléments métriques, et dont on indiquera quelques tangentes remarquables. Le lieu de l'orthocentre* P *du triangle* ORS *est une conique, dont on indiquera quelques points remarquables: même question pour le triangle* O′RS;

4° *Soient* RM, RN *et* RM′, RN′ *les tangentes menées d'un point* R *de la droite r aux deux cercles* O *et* O′; *le plan étant orienté dans le sens* ABCD, *soient* α, β *et* γ, δ *les angles que font avec un axe porté par la droite r des demi-droites portées par ces tangentes et situées d'un même côté de la droite r pour chacun des cercles* O *et* O′ (*ces angles se retrouvent en* O *et* O′); *on pose*

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=x, \qquad \frac{\beta-\alpha}{2}=u,$$

$$\frac{\gamma+\delta}{2}=y, \qquad \frac{\delta-\gamma}{2}=v.$$

Établir les relations suivantes :

$$\cos^2 u=\left(1+\frac{R'^2}{R^2}\right)\cos^2 x, \qquad \cos^2 v=\left(1-\frac{R^2}{R'^2}\right)\cos^2 y,$$

$$\frac{1+\operatorname{tang} x}{1+\operatorname{tang} y}=-\frac{R'^2}{R^2}.$$

Vérifier, au moyen de ces relations, que les tangentes RM, RN *et* RM′, RN′ *forment un faisceau harmonique.*

Le point R *de la droite r peut d'ailleurs être remplacé par un point* S *de la droite s.*

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne une parabole (P) *et une droite* (D) *dont les équations, relatives à un système d'axes coordonnés rectangulaires, sont*

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} y^2-2px=0, \\ z=0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{D}) \qquad \begin{cases} y=0, \\ z=a, \end{cases}$$

et l'on considère la surface (S) *engendrée par une droite variable* (Δ) *assujettie à rencontrer* (P) *en un point* A *et* (D) *en un point* B, *de façon que la distance* AB *soit une constante* l.

1° *Construire la projection sur le plan* xOy *d'une section de la surface par un plan parallèle au plan* xOy; *construire la tangente en un point de cette projection et montrer que la courbe obtenue peut être regardée comme le lieu des milieux de cordes parallèles à* Ox *et limitées, d'une part à une parabole de sommet* O *et d'axe* Ox, *d'autre part à une ellipse dont les axes sont dirigés suivant* Ox *et* Oy.

2° *On peut distinguer deux sortes de droites* Δ *suivant que l'abscisse de* A *est supérieure ou inférieure à celle de* B; *séparer sur les sections précédentes les arcs qui correspondent aux génératrices de l'un ou de l'autre système et trouver le lieu des points qui limitent ces arcs.*

3° *On considère le solide limité par la surface* (S) *et par les plans* $z - a = 0$, $z - 2a = 0$: *trouver son volume et construire son contour apparent sur le plan* zOx.

4° *Déterminer les trajectoires orthogonales des droites* (Δ). *Par un point* A, *on peut mener deux droites* (Δ), *qui rencontrent une trajectoire orthogonale en deux points* C *et* C'; *montrer qu'on peut choisir cette trajectoire de façon que la somme* $\overline{AC} + \overline{AC'}$ *soit proportionnelle à l'abscisse de* A.

Peut-on choisir les constantes données de façon qu'une seule trajectoire orthogonale rencontre toutes les droites (Δ) *entre leurs points situés sur la parabole* (P) *et sur la droite* (D)?

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Ox, Oy, Oz *étant trois axes rectangulaires donnés, on considère une surface* S, *d'un seul tenant. Soit* s *une portion quelconque de* S, *sans point commun avec* Oz *et n'ayant pas de plan tangent parallèle à* Oz.

I. *Soient* A *l'aire de la projection de* s *sur le plan des* xy; B, *le volume limité par l'aire* s, *sa projection* A *et le cylindre projetant;* C, *le volume limité par l'aire* s *et le cône ayant pour base cette aire et pour sommet l'origine*; D, *le volume limité par l'aire* s *et par le conoïde*

qui a le contour de s pour directrice, O z pour axe et x O y pour plan directeur.

Les notations B, C, D *représentant les volumes en question affectés de signes convenables, montrer qu'on a*

$$(1) \qquad 3\,C = B - 2\,D$$

tant que l'aire s n'est pas coupée par certaines lignes situées sur S. *Montrer également que la formule subsiste même sans cette dernière restriction si l'on prend les éléments de* B *en grandeur et signe, de manière à avoir toujours*

$$B = \int\int z\,dx\,dy$$

(*l'intégrale double étant étendue à l'aire* A), *et qu'en même temps les éléments des volumes* C, D *soient aussi affectés de signes convenables, dépendant de* x, y, z, p, $q\left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$. *On énoncera, autant que possible, géométriquement les conventions de signes auxquelles on sera ainsi conduit.*

II. *Le cône (supposé réduit à une seule de ces nappes) qui limite le volume* C *détermine, sur le cylindre de révolution de rayon* 1 *qui a* O z *pour axe, une aire algébrique dont les éléments seront affectés des mêmes signes que les éléments correspondants de* C, *conformément aux conventions précédentes : soit* E *cette aire.*

D'autre part, on fait tourner s autour de O z *et l'on désigne par* F *le volume de révolution ainsi engendré, par* G *l'aire de la section méridienne de ce volume, un élément de* F *ou de* G *étant également affecté d'un signe (le même dans les deux cas) d'après une convention convenable.*

Déterminer la surface S *de manière que, pour toute portion s (sans point commun avec* O z *ni plan tangent parallèle à* O z) *prise sur cette surface, on ait la relation*

$$(2) \qquad a\,A + b\,B + 3\,c\,C + e\,E + \frac{f}{2\pi}\,F + g\,G = 0,$$

où a, b, c, e, f, g *sont des constantes. Montrer que* S *doit vérifier une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre dont les coefficients sont des fonctions ra-*

tionnelles de x, y, z, ρ, où $\rho = \sqrt{x^2 - y^2}$ (le radical étant pris positivement). Indiquer (en l'énonçant encore géométriquement) la détermination du signe commun à donner à un élément quelconque de F *et à l'élément correspondant de* G, *de manière que cette équation soit la même pour toute la surface considérée.*

Trouver les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue, en employant les coordonnées semi-polaires ρ, ω (coordonnées polaires de la projection du point sur le plan xOy), z (cote du point).

Étudier les projections de ces caractéristiques sur le plan xOy. Faire voir qu'il peut exister des caractéristiques qui soient situées sur un cylindre de révolution d'axe Oz, et discuter leur forme.

III. *On suppose les constantes b, c liées par la relation*

$$b + 3c = 0. \tag{3}$$

On considère l'intégrale curviligne

$$I = \int \left[z\left(c - \frac{e}{\rho^3}\right) - \frac{a}{2} \right] (x\,dy - y\,dx) - \rho\left(\frac{\rho}{2} f + g\right) dz$$

prise d'un point M *à un point* M′ *de la surface* S, *le long d'un chemin* L *situé tout entier sur cette surface. Montrer que si* S *satisfait à la condition qui lui a été imposée dans la Partie II, et si, sous le signe $\int$, le signe du terme en dz a été convenablement choisi, l'intégrale* I *ne change pas de valeur lorsque,* M *et* M′ *restant fixes, on déforme d'une manière continue, sur la surface, la ligne* L *tracée entre ces deux points.*

Si, au lieu de la relation (3), *les constantes b, c ont entre elles la relation*

$$b + 6c = 0, \tag{4}$$

une propriété analogue à la précédente appartient à l'intégrale

$$J = \int z\,\frac{(c\rho^3 - e)^2}{\rho^3}(x\,dy - y\,dx) - \varepsilon g z\,\frac{c\rho^3 - e}{\rho}(x\,dx - y\,dy)$$
$$- P[\varepsilon f \rho^2\,dz - a(x\,dy - y\,dx)].$$

où P *est un polynome entier en* ϱ *convenablement choisi et* z *est l'une des deux quantités* -1, -1.

IV. *On suppose en outre que la surface* S *contient une circonférence dont le plan passe par* Oz *et qui n'a aucun point commun avec* Oz, *ni avec le cylindre de révolution précédemment considéré (fin de la Partie II). Sur chacune des caractéristiques issues des différents points de cette circonférence, on prend un arc limité, et cela de manière que la portion* Σ *de* S *ainsi délimitée ne contienne aucune singularité.*

En supposant donnée la valeur de l'intégrale I [*dans le cas de la relation* (3)] *ou* J [*dans le cas de la relation* (4)] *le long d'un certain chemin* L *joignant* M *et* M' *et situé sur* Σ, *quelles sont les autres valeurs que peut acquérir cette intégrale lorsqu'on remplace* L *successivement par tous les autres chemins qu'on peut tracer entre les mêmes points sur* Σ?

Indiquer la relation qui doit exister entre le rayon de la circonférence, la distance de son centre à Oz *et les coefficients de l'équation* (2) *pour que la valeur de l'intégrale considérée soit unique dans ces conditions.*

MECANIQUE.

Un cerf-volant de poids P *est soumis à l'action normale du vent, représentée par une force* $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ P. *Dans sa position d'équilibre, il est incliné à* 30° *sur l'horizon; il admet un axe de symétrie sur lequel se trouvent son centre de gravité* G *et le centre* O *de poussée du vent;* O *est au-dessus de* G *et* OG *égale* 4^{cm}.

En un point A *de l'axe, placé au-dessous de* G, *à* 40^{cm} *de* G, *est attaché un fil de longueur* l; *deux autres fils, de longueur* l', *sont attachés en deux points* B *et* C *symétriques par rapport à l'axe; la droite* BC, *égale à* $2d$, *est au-dessus de* G *à* 29^{cm} *de* G. *Dans la position d'équilibre, ces trois fils, flexibles, inextensibles et sans masse, sont tendus et réunis en un point* M, *auquel est attachée la ficelle qui retient le cerf-volant.*

1° *Trouver la relation qui lie* l, l' *et* d; *supposant ces longueurs connues, calculer les tensions des trois fils.*

2° *Le point* M *étant à* 30^{m} *au-dessus du sol, quelle est la tension à l'autre extrémité* E *de la ficelle supposée fixée au sol, flexible, inextensible et de poids p par unité de longueur; déterminer p de façon que la tangente en* E *soit horizontale.* (*On ne tiendra pas compte de l'action du vent sur la ficelle.*)

3° *Dans ces conditions, on suppose que la ficelle, prolongée à partir de* E, *s'enroule immédiatement, avec frottement de coefficient f suivant une hélice tracée sur un cylindre de révolution fixe, dont l'axe est perpendiculaire au plan de la ficelle, le rayon du cylindre étant r et le pas de l'hélice h; quelle sera la force nécessaire pour maintenir l'équilibre, cette force étant appliquée à la nouvelle extrémité libre de la ficelle supposée enroulée suivant une spire complète.* (*On ne tiendra pas compte du poids de la partie enroulée.*)

4° *La ficelle qui retient le cerf-volant ayant la forme trouvée précédemment* (2°) *et étant supposée indéformable, on place à l'extrémité située sur le sol un postillon soumis à une force, résultante du poids du postillon et de l'action du vent; cette force est constante et est dans le plan de la ficelle; quelle condition doit-elle remplir pour que le postillon se mette en mouvement en supposant qu'il y ait frottement de coefficient* 1?

Étudier le mouvement du postillon dans le cas où la force est horizontale. (*On assimilera ce postillon à un point matériel mobile avec frottement de coefficient* 1 *sur la courbe matérielle représentée par la ficelle supposée indéformable.*)

ERRATA.

(1909, p. 336.)

Question 2134. — Ligne 3, *au lieu de :* par rapport à C, *lire :* par rapport à O.

(1909, p. 384.)

Question 2135. — Ligne 1, *au lieu de :* son foyer, *lire :* le foyer. — Ligne 3, *au lieu de :* ellipse E, *lire :* ellipse E_1.

[O'5n]

UNE APPLICATION GÉOMÉTRIQUE DE LA SÉRIE CONSIDÉRÉE PAR AIRY DANS LA DIFFRACTION DES OUVERTURES CIRCULAIRES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Airy [1] a considéré la série absolument convergente pour toute valeur de m,

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{1!}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{m^2}{2!}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{m^3}{3!}\right)^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{m^n}{n!}\right)^2 + \ldots$$

dont il a donné la Table pour les valeurs de m variant de dixièmes en dixièmes de 0 à 6. Cette série a une grande importance dans l'étude des images fournies par les instruments d'optique.

Je signale qu'elle intervient dans la détermination des *lignes de plus grande pente de la surface d'équation*

$$z = y(5x^2 - y^4),$$

par rapport à des axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, ce dernier étant vertical.

La surface du cinquième degré considérée offre un certain intérêt. Elle est engendrée par des paraboles $y = \text{const.}$ assujetties à rencontrer deux paraboles du plan Oxy; en projection sur Oxz, ces paraboles forment une famille telle qu'il passe cinq paraboles par tout point de ce plan; l'équation, par rapport au paramètre, se présente sous une forme qui se ramène

[1] AIRY, *On the diffraction of an object-glass with a circular aperture* (*T. C. P. S.*, t. V, 1834).

immédiatement à celle que prête, comme forme canonique, le théorème de Jerrard à l'équation générale du cinquième degré.

Les lignes asymptotiques (des deux familles) *sont algébriques :* leurs projections sur Oxy sont les courbes

$$4x^2(x^2+2y^4)^3=(y^8+10x^2y^4-2x^4-\lambda)^2,$$

parmi lesquelles se trouvent les paraboles

$$y^2 \pm 2x = 0.$$

En posant

$$x^2 = 4\xi, \qquad y^2 = \frac{2}{\eta},$$

l'équation des lignes de plus grande pente prend la forme d'une équation de Riccati

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 - \frac{1}{\xi} = 0;$$

cette équation est équivalente à l'équation du second ordre

$$\xi\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} - \zeta = 0,$$

c'est-à-dire à *l'équation du mouvement d'un pendule simple dont la longueur croît proportionnellement au temps* (seau dans un puits) *et dans le cas des petites oscillations* [1].

Du point de vue de la forme, l'équation précédente du second ordre est un cas particulier d'équations con-

---

[1] Bossut, *Sur le mouvement d'un pendule dont la longueur est variable* (*M. A. P.*, 1778).

sidérées par Lobatto [1] et par Kummer [2], mais ce n'est pas un des cas particuliers pour lesquels ils ont effectué l'intégration au moyen d'intégrales définies. J'ai obtenu une intégrale de cette nature,

$$\zeta_1 = \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{\xi}{\alpha}\right)} d\alpha,$$

en considérant l'équation comme une équation linéaire de Laplace et en effectuant une inversion et une symétrie dans le plan de la variable complexe. L'intégrale ainsi obtenue coïncide avec celle que Poisson donne pour l'équation plus générale

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \xi^\mu \zeta.$$

L'équation adjointe de l'équation mise sous la forme

$$\xi \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} - \zeta = 0$$

est, ainsi que l'équation elle-même, un cas particulier de l'équation en laquelle dégénère l'équation de Bessel, lorsque l'un des points singuliers s'éloigne à l'in-

---

(1) Lobatto, *Sur l'intégration des équations*

$$\frac{d^n y}{dx^n} - xy = 0, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + ab x^n y = 0$$

par des intégrales définies (*Crelle*, t. 17).

(2) Kummer, *Sur l'intégration générale de l'équation de Riccati par des intégrales définies* (*Crelle*, t. 12).

Kummer, *Note sur l'intégration de l'équation* $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$ *par des intégrales définies* (*Crelle*, t. 19).

Kummer, *Sur l'intégration de l'équation* $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$ (*J. M.*, 1re série, t. IV).

fini :

$$\xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \gamma \frac{du}{d\xi} - u = 0;$$

l'équation primitive s'obtient en posant $\gamma = 0$; l'équation adjointe s'obtient en posant $\gamma = 2$. Cette équation adjointe est d'ailleurs équivalente (¹) à l'équation primitive; il suffit de poser

$$\zeta = u\xi.$$

De cette équation de Bessel on connait l'intégrale

$$u = 1 + \frac{1}{\gamma}\frac{\xi}{1} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{\xi^n}{n!},$$

lorsque γ n'est pas nul; en particulier, pour $\gamma = 2$, cette série est

$$u_2 = 1 + \frac{\xi}{2} + \ldots + \frac{\xi^n}{(n+1)[n!]^2},$$

c'est-à-dire la série d'Airy, à condition de poser

$$\xi = -m^2.$$

On obtient donc une intégrale particulière ζ_2

$$\zeta_2 = \xi\left[1 + \frac{\xi}{2} + \ldots + \frac{\xi^n}{(n+1)[n!]^2} + \ldots\right],$$

qui est celle que M. Lecornu (²) a obtenue par la méthode des coefficients indéterminés.

Observons que les intégrales ζ_1 et ζ_2 sont dis-

(¹) L'équation mise sous la forme $\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} - \frac{\zeta}{\xi} = 0$ est une des équations d'ordre *pair* (M. Darboux a mis en évidence la nécessité de cette distinction) qui sont identiques à leur adjointe, et qui, du point de vue de la théorie de la variation seconde des intégrales simples, ont été étudiées par Jacobi, par Bertrand et par Hesse.

(²) Lecornu, *Mémoire sur le pendule de longueur variable* (*A. M.*, t. XIX).

tinctes : ζ_1, en effet, n'est pas développable en série de Mac-Laurin. Observons en second lieu que la somme de la série d'Airy s'exprime au moyen de la fonction J_1 de Bessel et qu'elle a pour expression $\frac{1}{m} J_1(2m)$.

En résumé, *de l'équation du second ordre, nous connaissons une intégrale* ζ_1

$$\zeta_1 = \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{\xi}{\alpha}\right)} d\alpha,$$

et une intégrale ζ_2 *qui s'exprime à l'aide de la série d'Airy ou, ce qui revient au même, à l'aide de la fonction de Bessel d'indice* un *et de première espèce.*

La détermination des lignes de plus grande pente est donc complètement effectuée; l'équation cartésienne de leurs projections est

$$y^2 = -2\frac{\int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{x^2}{4\alpha}\right)} d\alpha + iCxJ_1(ix)}{\int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{x^2}{4\alpha}\right)} \frac{d\alpha}{\alpha} + 2CJ_0(ix)},$$

C étant la constante arbitraire *réelle* d'intégration; l'imaginaire i ne s'introduit qu'en apparence.

Remarquons que chacune des deux intégrales de l'équation du second ordre eût permis d'effectuer cette détermination à l'aide d'une seule quadrature; en désignant, en effet, par ζ_0 une intégrale particulière de l'équation du second ordre et par η_0 l'intégrale particulière correspondante

$$\eta_0 = \frac{1}{\zeta_0}\frac{d\zeta_0}{d\xi}$$

de l'équation de Riccati, l'intégrale générale de l'équa-

tion du second ordre est

$$\zeta = \zeta_0 \left(A + B \int \frac{d\xi}{\zeta_0^2} \right),$$

et l'intégrale générale de l'équation de Riccati est

$$\eta = \eta_0 + \frac{1}{\zeta_0^2 \left(\int \frac{d\xi}{\zeta_0^2} + C \right)};$$

A, B, C désignent des constantes [1].

Généralisation. — Considérons *l'équation de Riccati*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{X},$$

dans laquelle X *est un trinome du second degré en* x.

Lorsque X est une constante, l'équation s'intègre par des fonctions élémentaires. Lorsque X est du premier degré, l'équation est celle que nous venons d'étudier. Lorsque X est du second degré et à racines confondues, l'équation est réductible à l'équation

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{x^2},$$

dont M. Raffy a donné l'intégrale générale

$$\frac{2xy - (1 + \sqrt{5})}{2xy - (1 - \sqrt{5})} x^{\sqrt{5}} = \text{const.}$$

à la page 545 des *Nouvelles Annales* de 1902.

---

[1] Ces formules s'appliquent à l'équation générale de Riccati mise sous la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \Xi(\xi),$$

lorsqu'une intégrale particulière ζ_0 de l'équation du second ordre est connue.

Examinons donc le cas où X est un trinome du second degré à racines distinctes :

$$X \equiv K(x-a)(x-b).$$

L'équation équivalente du second ordre est, en prenant la nouvelle variable ξ définie par la relation

$$x = a + (b-a)\xi,$$

une équation de Gauss pour laquelle γ est nul, pour laquelle, par conséquent, on ne connaît pas d'intégrale. En procédant comme plus haut, on est conduit à une équation de Gauss

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2z}{d\xi^2} + 2(1-2\xi)\frac{dz}{d\xi} - \left(2 - \frac{1}{K}\right)z = 0,$$

pour laquelle γ est égal à 2 et pour laquelle α et β sont les racines de l'équation

$$u^2 - 3u + 2 - \frac{1}{K} = 0.$$

Pour la double raison que γ d'une part et $\alpha + \beta - \gamma$ d'autre part sont des nombres entiers, on ne connaît pas les vingt-quatre intégrales de Kummer.

Appliquons les résultats trouvés par M. Goursat [1] pour le cas où γ est un entier de la forme

$$\gamma = 2 + m;$$

m est nul. Le cas exceptionnel d'une intégrale uniforme dans le voisinage de l'origine ne peut se présenter; la suite

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad m+1$$

---

[1] Goursat, *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique* (*A. E. N.*, 1881).

se réduit en effet à 1 ; si α était égal à 1, β devrait être égal à 2 et K devrait être infini.

On a deux intégrales :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$
$$\operatorname{Log}\xi . F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) + \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$

dans lesquelles α, β, γ doivent être remplacés par leurs valeurs ; Φ est défini par la formule

$$\Phi = \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F}{\partial \gamma},$$

ou

$$\Phi = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n+1} \frac{\xi^n}{[n!]^2},$$

en posant

$$A_n = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha+n-1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \ldots$$
$$- \frac{1}{\beta+n-1} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right);$$

le développement de F est divergent pour $\xi \geqq 1$.

Deux intégrales de l'équation du second ordre étant connues, *l'équation de Riccati*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{K(x-a)(x-b)}$$

est intégrée.

Les racines distinctes a, b de X ne jouant aucun rôle, *les équations de Riccati considérées se classent d'après les valeurs de* K.

Pour $K = -\frac{1}{4}$, α et β sont égaux entre eux et à $\frac{3}{2}$.

Pour $\frac{1}{K} = N(N+1)$, N étant un nombre entier, α

et β sont des nombres entiers :

$$\alpha = 2 + N,$$
$$\beta = 1 - N.$$

Pour $K = \frac{1}{2}$, l'un des paramètres α, β est nul; *l'équation de Riccati*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{2}{(x-a)(x-b)}$$

s'intègre au moyen des fonctions élémentaires, et son intégrale générale est

$$y = \frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)} - \frac{\dfrac{(a-b)^2}{(x-a)^2(x-b)^2}}{\dfrac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)} + \dfrac{2}{a-b}\operatorname{Log} C\dfrac{x-a}{x-b}}.$$

Ce cas est le seul pour lequel la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ dégénère en une des fonctions élémentaires signalées par Gauss : le seul cas qui mérite d'être examiné est celui de la fonction

$$(t+u)^n - t^n = nt^{n-1}u\,F\left(1-n, 1, 2, -\frac{u}{t}\right);$$

K devrait être infini, puisqu'on devrait avoir

$$n = -1, \qquad \alpha = 2, \qquad \beta = 1.$$

[A3h]

SUR LA TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ EN ELLE-MÊME;

PAR M. R. ALEZAIS.

Je me propose de résoudre ce problème tel qu'il est proposé dans les *Leçons d'Algèbre* de Briot (17e édi-

tion, n° 152, p. 687) et sans recourir à l'Algèbre supérieure.

Étant donnée l'équation

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

trouver les substitutions rationnelles qui reproduisent cette équation. (Toute fonction rationnelle d'une racine x de l'équation peut se ramener à la forme

$$(2) \qquad y = \lambda x^2 + \mu x + \nu;$$

il faut déterminer λ, μ, ν de façon que l'équation en y soit identique à l'équation en x.)

Si une substitution transforme une équation en elle-même, c'est qu'elle ne fait que permuter ses racines. Cette remarque permet de trouver les substitutions (2) quand on connaît les racines de l'équation (1).

Si l'on se propose de trouver les substitutions en fonction des coefficients de l'équation, elle fournit encore les renseignements suivants : Il y a six permutations des trois racines a, b, c de l'équation (1); les coefficients λ, μ, ν des substitutions (2) seront donc donnés par des équations du sixième degré; mais parmi ces six permutations se trouve la permutation identique qui correspond à $\lambda = \nu = 0$, $\mu = 1$; on sera donc ramené à des équations du cinquième degré. Enfin, le groupe des permutations de trois quantités admettant pour sous-groupe le groupe $(1, S, S^2)$ où $S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et ce sous-groupe n'ayant à l'intérieur du groupe qu'un seul conjugué, on peut conjecturer que les coefficients des substitutions S et S^2 dépendent seulement d'équations du second degré et nous le vérifierons plus bas; en conséquence, les premiers membres des équations du cinquième degré se décomposeront

en produits de facteurs rationnels du second et du troisième degré.

Cherchons d'abord les équations du cinquième degré.

Il s'agit d'éliminer x entre les équations

$$x^3 + px + q = 0, \qquad \lambda x^2 + \mu x - (y - \nu) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, entre

$$\lambda x^2 + \mu x - (y - \nu) = 0, \quad \mu x^2 + \lambda(y - \nu + p\lambda)x - q\lambda = 0.$$

On trouve

$$[\mu^2 + \lambda(y - \nu + p\lambda)][q\lambda\mu + (y - \nu)(y - \nu + p\lambda)] \\ - [q\lambda^2 - (y - \nu)\mu]^2 = 0$$

ou

$$(y - \nu)^3 + 2p\lambda(y - \nu)^2 \\ + (p\mu^2 + 3q\lambda\mu + p^2\lambda^2)(y - \nu) + q\mu^3 + pq\lambda^2\mu - q^2\lambda^3 = 0.$$

Pour que cette équation soit identique à l'équation

$$y^3 + py + q = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(y - \nu)^3 + 3\nu(y - \nu)^2 + (3\nu^2 + p)(y - \nu) + \nu^3 + p\nu + q = 0.$$

il faut que l'on ait

$$(3) \qquad \begin{cases} 2p\lambda = 3\nu, \\ p\mu^2 + 3q\lambda\mu + p^2\lambda^2 = 3\nu^2 + p, \\ q\mu^3 + pq\lambda^2\mu - q^2\lambda^3 = \nu^3 + p\nu - q. \end{cases}$$

On vérifie que ce système admet pour solution

$$\lambda = \nu = 0, \qquad \mu = 1.$$

Éliminons d'abord λ et μ; nous aurons

$$4p^2\mu^2 + 18q\nu\mu - 3p\nu^2 - 4p^2 = 0,$$
$$8p^3q\mu^3 + 18p^2q\nu^2\mu - (8p^3 + 27q^2)\nu^3 - 8p^2\nu - 8p^3q = 0.$$

On peut remplacer cette dernière équation par

$$36pq^2\nu\mu^2 - 8p^2q(3\nu^2+p)\mu$$
$$+(8p^3+27q^2)\nu^3+8p^4\nu+8p^3q=0.$$

Posons

$$\Delta = 4p^3+27q^2;$$

le résultant pourra s'écrire

$$q^2(3\Delta\nu^2+4p^4)(9\Delta\nu^4+12p^4\nu^2+72p^3q\nu-16p^5)$$
$$+p^3(2\Delta\nu^3+4p(2p^3+9q^2)\nu+8p^3q)^2=0,$$

ou

$$\Delta^3\nu^6+8p^4\Delta^2\nu^4+8p^3q\Delta^2\nu^3+16p^8\Delta\nu^2+32p^7q\Delta\nu=0.$$

D'où l'équation du cinquième degré en ν

$$\chi(\nu)=\Delta^2\nu^5+8p^4\Delta\nu^3+8p^3q\Delta\nu^2+16p^8\nu+32p^7q=0.$$

En éliminant ν entre cette équation et la première équation (3), on obtient l'équation en λ

$$\varphi(\lambda)=\Delta^2\lambda^5+18p^2\Delta\lambda^3+27q\Delta\lambda^2+81p^4\lambda+243p^2q=0.$$

Enfin, l'équation en μ résulte de l'élimination de ν entre les équations

$$3p\nu^2-18q\mu\nu-4p^2(\mu^2-1)=0,$$
$$(4p^3+\Delta)\nu^3-18p^2q\mu\nu^2+8p^4\nu-8p^3q(\mu^3-1)=0.$$

On peut remplacer cette dernière par

$$9q(p^3+\Delta)\mu\nu^2$$
$$+2p^2[(4p^3+\Delta)\mu^2+2p^3-\Delta]\nu-12p^4q(\mu^3-1)=0.$$

Le résultant est

$$\Delta^2\mu^6-6p^3\Delta\mu^4-27q^2\Delta\mu^3$$
$$+9p^6\mu^2+81p^3q^2\mu-p^3(\Delta-3p^3)=0;$$

et en divisant le premier membre par $\mu-1$, on a

$$\psi(\mu)=\Delta^2\mu^5+\Delta^2\mu^4+\Delta(\Delta-6p^3)\mu^3$$
$$-2p^3\Delta\mu^2+p^3(9p^3-2\Delta)\mu+p^3(\Delta-3p^3)=0.$$

Nous allons voir maintenant que chacun des trois polynomes $\varphi(\lambda)$, $\psi(\mu)$, $\chi(\nu)$ admet un diviseur rationnel du second degré. Pour cela, cherchons directement les substitutions

$$x = \lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1, \qquad y = \lambda_2 x^2 + \mu_2 x + \nu_2$$

qui font subir aux racines a, b, c une permutation tournante. Il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} &\lambda_1 a^2 + \mu_1 a + \nu_1 = b, && \lambda_2 a^2 + \mu_2 a + \nu_2 = c, \\ &\lambda_1 b^2 + \mu_1 b + \nu_1 = c, && \lambda_2 b^2 + \mu_2 b + \nu_2 = a, \\ &\lambda_1 c^2 + \mu_1 c + \nu_1 = a, && \lambda_2 c^2 + \mu_2 c + \nu_2 = b. \end{aligned}$$

Posons

$$\delta = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(a-c) = \sqrt{-\Delta};$$

il en résultera

$$\begin{aligned} \delta\lambda_1 &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca), \\ \delta\mu_1 &= -(a^3 + b^3 + c^3) + a^2 c + b^2 a + c^2 b, \\ \delta\nu_1 &= a^3 b + b^3 c + c^3 a - (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda_2 &= -(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca, \\ \delta\mu_2 &= a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 b + b^2 c + c^2 a), \\ \delta\nu_2 &= a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 - (a^3 c + b^3 a + c^3 b). \end{aligned}$$

On voit que les quantités λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2 sont ou bien invariantes ou bien susceptibles de deux déterminations seulement, quand on effectue sur a, b, c toutes les permutations ; on peut donc les calculer en fonction de p et de q par des équations du premier ou du second degré.

Des relations

$$a + b + c = 0, \qquad ab + bc + ca = p, \qquad abc = -q.$$

on tire

$$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2p,$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2p.$$

Il en résulte

$$\delta\lambda_1 = -3p, \qquad \delta\lambda_2 = 3p;$$

et, en vertu de la première relation (3),

$$\delta\nu_1 = -2p^2, \qquad \delta\nu_2 = 2p^2.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
\delta(\mu_1 + \mu_2) &= a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - b^2c - c^2a \\
&= (c - b)(a - b)(a - c) = -\delta, \\
-\delta^2\mu_1\mu_2 &= [a^3 + b^3 + c^3 - (a^2c + b^2a + c^2b)] \\
&\quad \times [a^3 + b^3 + c^3 - (a^2b + b^2c + c^2a)] \\
&= (a^3 + b^3 + c^3)^2 + (a^2c + b^2a + c^2b) \\
&\quad \times (a^2b + b^2c + c^2a) - (a^3 + b^3 + c^3)\mathrm{M},
\end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{M} = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

et

$$\begin{aligned}
&(a^2c + b^2a + c^2b)(a^2b + b^2c + c^2a) \\
&\quad = a^3c^3 + b^3a^3 + c^3b^3 + abc(a^3 + b^3 + c^3) + 3a^2b^2c^2.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
0 &= (a + b + c)(ab + bc + ca) = \mathrm{M} + 3abc, \\
0 &= (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\mathrm{M} + 6abc, \\
p^3 &= (ab + bc + ca)^3 = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + 3abc\mathrm{M} + 6a^2b^2c^2.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} &= 3q, \\
a^3 + b^3 + c^3 &= -3q, \\
a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 &= p^3 + 3q^2, \\
(a^2c + b^2a + c^2b)(a^2b + b^2c + c^2a) &= p^3 + 9q^2,
\end{aligned}$$

et l'on a

$$\delta^2 \mu_1 \mu_2 = -(p^3 + 27 q^2).$$

$\delta\mu_1$ et $\delta\mu_2$ sont donc racines de l'équation

$$X^2 + \sqrt{-\Delta}\, X - (\Delta - 3p^3) = 0,$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{1}{2}(-\sqrt{-\Delta} \pm 9q).$$

On peut toujours supposer la détermination de $\sqrt{-\Delta}$ positive; je dis que l'on doit alors écrire

$$\delta\mu_1 = \frac{1}{2}(9q - \sqrt{-\Delta}), \qquad \delta\mu_2 = -\frac{1}{2}(9q + \sqrt{-\Delta}).$$

En effet, avec $4p^3 + 27q^2 < 0$, cas des trois racines réelles, si l'on suppose $a > b > 0 > c$, d'où $q > 0$, et que l'on élimine c, on trouve que $\delta\mu_2$ est toujours négatif; si l'on suppose $a > 0 > b > c$, d'où $q < 0$, et que l'on élimine a, on trouve que $\delta\mu_1$ est toujours négatif.

Avec $4p^3 + 27q^2 > 0$, si l'on pose

$$a = 2\alpha, \qquad b = -\alpha + \beta i, \qquad c = -\alpha - \beta i,$$

on trouve que la partie réelle de $\delta\mu_2$ a le signe de α et la partie réelle de $\delta\mu_1$ a le signe contraire; or α et $q = -2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)$ ont des signes contraires.

On a, en définitive, les deux substitutions

$$(4) \qquad \begin{cases} y = \dfrac{-6px^2 + (9q - \sqrt{-\Delta})x - 4p^2}{2\sqrt{-\Delta}}, \\[2ex] y = \dfrac{6px^2 - (9q + \sqrt{-\Delta})x + 4p^2}{2\sqrt{-\Delta}}. \end{cases}$$

Elles sont réelles quand elles permutent trois quan-

tités réelles, c'est-à-dire avec $\Delta < 0$; elles sont imaginaires avec $\Delta > 0$.

En tenant compte de l'hypothèse $x^3 + px + q = 0$, on vérifie facilement que chacune est à la fois le carré et l'inverse de l'autre.

Exemples. — 1° Soit $x^3 - 3x + 1 = 0$. On a $p = -3$, $q = 1$, $\sqrt{-\Delta} = 9$. Les deux substitutions sont

$$y = x^2 - 2, \qquad y = -x^2 - x + 2.$$

2° Soit $2x^3 - x - 1 = 0$. On a $p = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$, $\sqrt{-\Delta} = \frac{5i}{2}$. Les deux substitutions sont

$$y = \frac{-(6x^2 - 9x - 2)i - 5x}{10}, \qquad y = \frac{(6x^2 - 9x - 2)i - 5x}{10}.$$

Les équations qui ont pour racines les coefficients des substitutions (4) sont

$$(5) \quad \Delta\lambda^2 + 9p^2 = 0, \quad \Delta(\mu^2 + \mu + 1) - 3p^3 = 0, \quad \Delta\nu^2 + 4p^4 = 0.$$

Leurs premiers membres sont les diviseurs des polynomes $\varphi(\lambda)$, $\psi(\mu)$, $\chi(\nu)$, et l'on trouve

$$\varphi(\lambda) = (\Delta\lambda^2 + 9p^2)(\Delta\lambda^3 + 9p^2\lambda + 27q),$$
$$\psi(\mu) = (\Delta\mu^2 + \Delta\mu + \Delta - 3p^3)(\Delta\mu^3 - 3p^3\mu + p^3),$$
$$\chi(\nu) = (\Delta\nu^2 + 4p^4)(\Delta\nu^3 + 4p^4\nu + 8p^3q).$$

Les équations qui fournissent les coefficients des trois autres substitutions sont donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\lambda^3 + 9p^2\lambda + 27q &= 0, \\ \Delta\mu^3 - 3p^3\mu - p^3 &= 0, \\ \Delta\nu^3 + 4p^4\nu + 8p^3q &= 0. \end{aligned} \right.$$

On aurait pu les obtenir par le même procédé que les équations (5), mais le calcul eût été plus long.

Les équations (6) ont pour discriminants

$$\frac{3^6(2p^3+27q^2)^2}{\Delta^3},\quad \frac{3^6p^6q^2}{\Delta^3},\quad \frac{2^6p^6(2p^3+27q^2)^2}{\Delta^3}.$$

Ces quantités ont même signe que Δ. Il en résulte d'abord que, dans le cas où les trois racines sont réelles, toutes les substitutions qui transforment l'équation en elle-même sont réelles.

Avec $\Delta > 0$, je dis qu'il existe toujours une substitution réelle; en d'autres termes, que les racines réelles des trois équations (6) se correspondent. Cela résulte pour λ et ν de la première équation (3), mais il est moins facile de l'établir directement pour μ. On peut montrer l'existence de la substitution réelle de la manière suivante.

Posons de nouveau

$$a = 2\alpha,\qquad b = -\alpha+\beta i,\qquad c = -\alpha-\beta i,$$

d'où

$$\delta = (a-b)(b-c)(a-c) = 2\beta i(9\alpha^2+\beta^2),$$

et considérons la substitution qui échange les deux racines imaginaires. Ses coefficients λ_3, μ_3, ν_3 vérifient les relations

$$\lambda_3 a^2+\mu_3 a+\nu_3 = a,$$
$$\lambda_3 b^2+\mu_3 b+\nu_3 = c,$$
$$\lambda_3 c^2+\mu_3 c+\nu_3 = b.$$

et l'on a

$$\delta\lambda_3 = (b-c)[2a-(b+c)] = 4\alpha\beta i,$$
$$\delta\mu_3 = (b-c)[b^2+c^2-a^2-a(b+c)+bc]$$
$$= -2\beta(3\alpha^2-\beta^2)i,$$
$$\delta\nu_3 = a(b-c)[a(b+c)-(b^2+c^2)] = -8\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)i.$$

D'où, pour λ_3, μ_3, ν_3, les valeurs réelles

$$\lambda_3 = \frac{2\alpha}{9\alpha^2+\beta^2},\quad \mu_3 = -\frac{3\alpha^2-\beta^2}{2(9\alpha^2+\beta^2)},\quad \nu_3 = -\frac{4\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{9\alpha^2+\beta^2}.$$

Soit T la substitution correspondante ; les deux autres TS et TS^2 sont imaginaires en même temps que S et S^2.

En appliquant la formule de Cardan aux équations (6), on trouve pour la substitution réelle T

$$y = \frac{\sqrt[3]{2p^3 + 27q^2 - 3\sqrt{3}q\sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{2p^3 + 27q^2 + 3\sqrt{3}q\sqrt{\Delta}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\Delta}}$$
$$\times\left(\sqrt{3}x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}q - \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}q + \sqrt{\Delta}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\Delta}}px.$$

Mais

$$2p^3 + 27q^2 + 3\sqrt{3}q\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3}q + \sqrt{\Delta})^2$$

et l'on peut écrire

$$y = -\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}q - \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}q - \sqrt{\Delta}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\Delta}}$$
$$\times\left[\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{3\sqrt{3}q - \sqrt{\Delta}}}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt{3}x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + px\right].$$

Ainsi l'équation

$$2x^3 - x - 1 = 0$$

admet la substitution

$$y = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3} + 5} - \sqrt[3]{3\sqrt{3} - 5}}{5}$$
$$\times\left[\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3} - 5} + \sqrt[3]{3\sqrt{3} - 5}}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt{3}x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right].$$

Quand p ou q est nul, les résultats se simplifient. Dans le cas de l'équation

$$x^3 + px = 0,$$

on a d'abord les deux substitutions

$$y = \frac{-3x^2 - \sqrt{-p}\,x - 2p}{2\sqrt{-p}}, \qquad y = \frac{3x^2 - \sqrt{-p}\,x - 2p}{2\sqrt{-p}}.$$

On peut facilement déduire les autres des équations (6) qui deviennent ici

$$\lambda(4p\lambda^2 + 9) = 0, \qquad (\mu + 1)(2\mu - 1)^2 = 0, \qquad \nu(\nu^2 + p) = 0,$$

mais il est encore plus simple de remarquer que la substitution, qui est réelle quel que soit p, est manifestement ici

$$y = -x,$$

et que, par suite, les deux dernières sont

$$y = \frac{-3x^2 + \sqrt{-p}\,x - 2p}{2\sqrt{-p}}, \qquad y = \frac{3x^2 + \sqrt{-p}\,x + 2p}{2\sqrt{-p}}.$$

Dans le cas de l'équation

$$x^3 + q = 0,$$

on trouve immédiatement les cinq substitutions

$$y = \varepsilon x, \quad y = \varepsilon^2 x, \quad y = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{q}}, \quad y = -\frac{\varepsilon x^2}{\sqrt[3]{q}}, \quad y = -\frac{\varepsilon^2 x^2}{\sqrt[3]{q}},$$

où ε est une racine cubique imaginaire de l'unité.

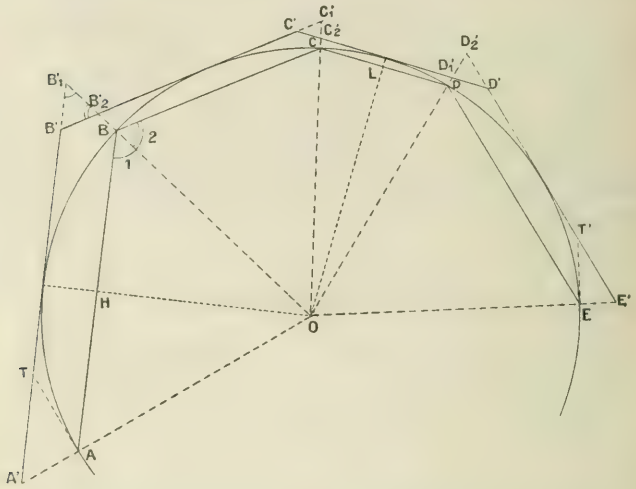
[K¹10c]

SUR LA LONGUEUR DE LA CIRCONFÉRENCE;

PAR M. L.-A. PAILLARD,
Professeur au Prytanée militaire.

On peut établir l'existence de la longueur de la circonférence de cercle en considérant une ligne brisée

convexe quelconque, inscrite dans la circonférence : soit ABCDE inscrite dans l'arc AE. Faisons-lui correspondre la ligne brisée circonscrite A′B′C′D′E′, dont



les côtés sont respectivement parallèles aux côtés de la première, et les extrémités A′ et E′ sur les rayons OA, OE. Ces deux lignes ont un même nombre n de côtés, et soient p_n et p'_n leurs périmètres.

On a toujours

$$p'_n \geqq p_n :$$

il suffit de mener les tangentes AT, ET′ à la circonférence et d'écrire que la ligne brisée convexe ABCDE est plus courte que la brisée enveloppante ATB′C′D′T′E, et que de plus les perpendiculaires AT, ET′ sur les rayons OA, OE sont plus courtes que les obliques AT, E′T′. De la combinaison de ces trois inégalités résulte l'inégalité

$$AB + BC + CD + DE \leqq A'B' + B'C' + C'D' + D'E',$$

c'est-à-dire

$$p_n \leq p_n.$$

Soit maintenant une nouvelle ligne brisée convexe inscrite, ayant comme sommets, en plus des points A, B, C, D, E, des points choisis d'une manière quelconque sur l'arc AE donné, et supposons que, dans les brisées successives ainsi obtenues, les angles sous lesquels on voit du centre les différents côtés décroissent indéfiniment et tendent vers zéro, en même temps par conséquent que la longueur de chaque côté (cela entraîne d'ailleurs que n croisse indéfiniment). Il est clair que, de proche en proche, chaque côté d'une brisée est remplacé par une brisée partielle plus longue, et par suite p_n augmente avec n. Il reste d'ailleurs plus petit que la brisée enveloppante ATB'C'D'T'E considérée au début. Il a donc une limite l, inférieure ou égale au périmètre de la ligne brisée ATB'C'D'T'E, d'après un théorème connu d'Arithmétique.

La brisée circonscrite varie d'ailleurs simultanément; nous allons montrer que p'_n a la même limite l, et pour cela, que $\frac{p'_n}{p_n}$ tend vers 1 lorsque n varie dans les conditions énoncées.

Considérons la somme

$$p''_n = A'B'_1 + B'_2C'_1 + C'_2D'_1 + D'_2E',$$

les points B'_1, B'_2, ... étant obtenus par intersection des côtés consécutifs A'B', B'C', ... avec les rayons OB, OC, ..., et supposons par exemple AB > BC dans la brisée donnée. On passe de p'_n à p''_n en enlevant des segments tels que $B'B'_2$ et les remplaçant par d'autres tels que $B'B'_1$. Pour établir l'inégalité $p'_n > p'_n$, il suffit d'établir les inégalités telles que $B'B'_1 > B'B'_2$.

Or, l'hypothèse AB > BC entraîne une inégalité de

même sens sur les angles au centre correspondants $AOB > BOC$ et une inégalité en sens contraire sur leurs demi-suppléments $\hat{1} < \hat{2}$; les angles $\hat{1}$ et $\hat{2}$ se reproduisent dans le triangle $B'B'_1B'_2$, et il en résulte

$$B'B'_1 > B'B'_2.$$

On a donc

$$A'B'_1 + B'_2C_1 + C'_2D'_1 + D'_2E' = A'B' + B'C' + C'D' + D'E'$$
$$= AB + BC + CD + DE,$$

et par conséquent

$$\frac{p''_n}{p_n} \geqq \frac{p'_n}{p_n} \geqq 1.$$

Or le rapport $\frac{p''_n}{p_n}$ est compris, d'après un théorème connu d'Arithmétique, entre le plus grand et le plus petit des rapports $\frac{A'B'_1}{AB}$, $\frac{B'_2C'_1}{BC}$, ..., soit entre $\frac{A'B'_1}{AB}$ et $\frac{C'_2D'_1}{CD}$, respectivement égaux à $\frac{R}{OH}$, $\frac{R}{OL}$, c'est-à-dire à $\frac{R}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}}$, $\frac{R}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2}}$, et chacun de ces rapports tend évidemment vers 1, puisque les côtés de la ligne brisée inscrite tendent par hypothèse vers zéro. Donc $\frac{p''_n}{p_n}$ a pour limite 1 et de même $\frac{p'_n}{p_n}$. Donc p'_n a une limite, et la même que p_n.

On montrerait d'ailleurs, selon la méthode habituelle, que cette limite est la même quel que soit le choix des sommets successivement ajoutés. Soient, par un autre procédé, P_m, P'_m, tendant vers la limite commune L. On aura évidemment $p_n < P'_m$; donc $l \leqq L$ et de même $P_m < p'_n$; donc $L \leqq l$, ce qui entraîne $l = L$, et cette limite commune est appelée la *longueur* de l'arc considéré.

Plus généralement, et indépendamment des sommets primitifs, la démonstration s'applique à toute suite de brisées convexes inscrites, soumise à la loi énoncée de décroissance des côtés.

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1909 (MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES) [1].

SOLUTION PAR UN ANONYME.

I.

Sauf en ce qui concerne le lieu de l'orthocentre P, la question est susceptible d'une solution très élémentaire. (Le lecteur est prié de faire la figure, les deux cercles O et O′ étant quelconques, extérieurs toutefois l'un à l'autre, bien entendu.)

On voit d'abord aisément que les droites AC et BD se croisent en K. En effet, si l'on mène d'un point I les deux tangentes IA et ID à un cercle O, et si l'on projette le point I en K sur un diamètre de ce cercle qui laisse A et D d'un même côté, la droite KI est bissectrice de l'angle AKD : la démonstration est immédiate en considérant la circonférence de diamètre OI, qui passe en A, D, K, et en remplaçant les angles en K par des angles en O; la droite KO′ est donc bissectrice de l'angle que forme KD avec le prolongement de KA au delà de K, d'où il suit que ce prolongement se confond avec KC.

On voit de même que les droites A′C′ et B′D′ se croisent en K. On mène ici les deux tangentes IA′ et ID′ à un cercle O′, et l'on projette le point I en K sur un diamètre de ce cercle qui passe entre A′ et D′ : la droite KI est bissectrice de l'angle formé par l'une des droites KA′, KD′ avec le prolongement de l'autre

[1] *Voir* l'énoncé, p. 426 du présent Tome.

au delà du point K; la droite KO′ est donc bissectrice de l'angle des droites KD′, KA′, d'où il suit que KA′ se confond avec KC′.

[Les cordes de contact A′D′, B′C′, AD, BC passent de même au point G; mais on n'aura pas à faire état de ce fait, les points K et G devant jouer dans la suite des rôles différents.]

1° *a*. Les deux cercles étant d'abord quelconques, les droites AC et A′C′ sont rectangulaires; pour que A′C′ se confonde avec BD, ces deux droites ayant le point K commun, il est donc nécessaire et suffisant que AC et BD soient rectangulaires; si l'on observe que l'angle $\widehat{AKD}$ est égal à l'angle $\widehat{A'ID'}$, on voit que cette condition équivaut à la suivante : *les tangentes communes intérieures doivent être perpendiculaires aux tangentes communes extérieures, aux points* I *et* J.

Or, s'il en est ainsi, les cercles orthoptiques des cercles donnés se coupent orthogonalement aux points I et J, puisque l'angle $\widehat{OIO'}$ est droit. Réciproquement, si les cercles orthoptiques des cercles donnés se coupent orthogonalement en deux points que nous appellerons I et J′, les tangentes menées de l'un de ces points aux deux cercles étant I′α, I′δ, I′δ′, I′α′, on a

$$\widehat{OI'\delta} = \frac{1^d}{2}, \qquad \widehat{O'I'\delta'} = \frac{1^d}{2}, \qquad \widehat{OIO'} = 1^d,$$

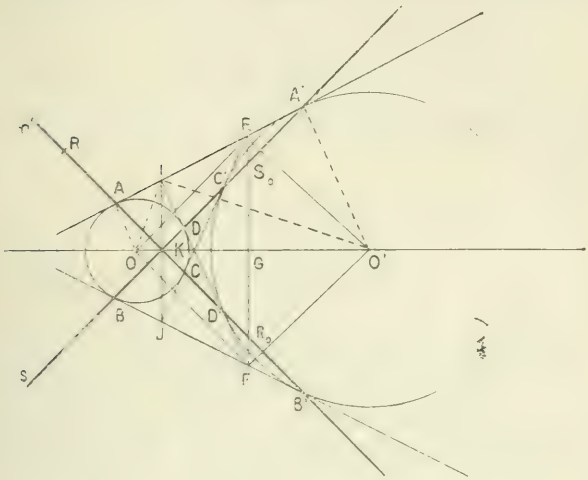
d'où il résulte que les droites I′δ et I′δ′ sont confondues, ainsi que les droites I′α et I′α′; les points I′ et J′ sont donc les points d'intersection des tangentes communes intérieures avec les tangentes communes extérieures, les premières sont perpendiculaires aux dernières, et la condition requise est vérifiée.

On a la relation métrique

$$\overline{OO'}^2 = 2(R^2 + R'^2).$$

b. Dans l'état général de la figure, le quadrilatère OEO'F a un axe de symétrie OO', deux angles

Fig. 1.



droits en E et en F, et ses côtés OE, O'F, par exemple, sont perpendiculaires aux cordes de contact AC et B'D'; pour que AC et B'D' se confondent, il faut et il suffit que OE et O'F soient parallèles, ou encore que le quadrilatère OEO'F soit un carré, ou enfin que le point G soit le milieu de OO'. On a alors la figure 1; et l'on peut observer que les triangles OAE, EA'O' sont égaux, ce qui donne la condition *nécessaire*

$$\overline{OE}^2 = R^2 - R'^2 \qquad \text{ou} \qquad \overline{OO'}^2 = 2(R^2 - R'^2).$$

2° La droite *r* est la polaire de E par rapport au cercle O, la polaire de F par rapport au cercle O'; si

l'on prend un point R sur la droite r, sa polaire par rapport au cercle O est la perpendiculaire à la droite OR menée par E, sa polaire par rapport au cercle O′ est la perpendiculaire à la droite O′R menée par F; on obtient donc ces deux polaires en faisant tourner les deux droites OR et O′R d'un angle droit autour du point G, de manière à amener le point O en E et le point O′ en F; dès lors, le point d'intersection S de ces deux polaires se déduit du point R par cette même rotation, de sorte que le lieu du point S est la droite s de l'énoncé.

Si R_0 et S_0 sont les points où la droite EF rencontre les droites r et s, on a

$$KR = S_0S, \qquad KS = R_0R;$$

si ρ et σ sont les milieux des segments KR_0 et KS_0, on a $\rho R = \sigma S$.

3° Les angles RKS et RGS étant droits, la circonférence de diamètre RS passe en K et G; la perpendiculaire à la droite OO′ menée par le milieu H du segment KG rencontre donc la droite RS en son milieu T, et la droite GT, médiane du triangle isoscèle RGS, est perpendiculaire à la droite RS. Dès lors, l'enveloppe de la droite RS est une parabole ayant pour foyer le point G et pour tangente au sommet la perpendiculaire à la droite OO′ menée par H; la directrice est la droite IJ.

Parmi les couples de points (R, S) se trouvent les couples

$$(R_0, K), \quad (K, S_0), \quad (A, A'), \quad (C, C'), \quad (D', D), \quad (B', B);$$

la parabole est tangente aux droites r et s, aux points R_0 et S_0; elle est inscrite au quadrilatère que forment les tangentes communes aux deux cercles. Les

points K, I, J étant sur la directrice, les tangentes issues de ces points sont rectangulaires.

On peut encore observer que la portion RS de la droite RS comprise entre les deux droites rectangulaires Kr et Ks est vue du point G sous un angle droit : dans ces conditions, l'enveloppe de la droite RS est une parabole de foyer G, dont la directrice passe en K.

II.

Les considérations suivantes sont un peu moins élémentaires.

Soient U et V les points de rencontre respectifs des tangentes communes extérieures et des tangentes communes intérieures : le quadrilatère UIVJ étant circonscrit à chacun des deux cercles, les cordes de contact AC, BD, A′C′, B′D′ passent au point K où se croisent les diagonales. (La considération du quadrilatère UEVF montre de même que les cordes de contact AD, BC, A′D′, B′C′ passent au point G.)

Les diagonales IJ, EF, UV du quadrilatère complet formé par les tangentes communes déterminent le triangle conjugué commun aux deux cercles : les sommets de ce triangle sont les points K, G, et le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à la ligne des centres.

Les deux cercles déterminent un faisceau de cercles dont les cercles de rayon nul ont leurs centres aux points K et G ; l'axe radical est équidistant des droites IJ et EF.

Cela posé, reprenons la solution du problème, avec le lieu de l'orthocentre P.

1° Comme ci-dessus.

2° La polaire du point R par rapport au cercle O passe en E et rencontre la droite s en un point S; le faisceau ER, ES, EA, EC est harmonique. La polaire de S par rapport au cercle O′ passe en E, et c'est la droite conjuguée de ES par rapport au système des deux droites EA′, EC′, ou EA, EC; c'est donc la droite ER. Les points R et S sont donc conjugués par rapport à chacun des deux cercles.

Autrement : les polaires de R par rapport aux cercles du faisceau défini par les deux cercles O et O′ sont concourantes: or la polaire de R par rapport au cercle de rayon nul qui a son centre en K est la droite s; donc....

Ou enfin : le cercle RKG coupant encore la droite s en un point S, comme l'angle RKS est droit, les points R et S sont diamétralement opposés sur ce cercle; comme il est orthogonal à chacun des cercles O et O′, puisqu'il passe aux points K et G, les points R et S sont conjugués par rapport à chacun de ces deux cercles.

3° *a*. Cette dernière démonstration utilise le cercle RKGS qui sert également pour l'enveloppe de la droite RS. L'axe radical des deux cercles donnés est la perpendiculaire à la ligne des centres menés au milieu H du segment KG: cette droite rencontre le diamètre RS du cercle RKGS en un point T qui est le centre de ce cercle, et l'on a

$$\widehat{GTS} = 2\widehat{GKS} = 1^d.$$

Dès lors, l'enveloppe de la droite RS est une parabole ayant pour foyer le point G et pour tangente au sommet l'axe radical des deux cercles; la directrice est la droite IJ.

Cette parabole est la parabole du faisceau tangentiel défini par les deux cercles O et O′; la polaire du point K est la même que pour les deux cercles, c'est la droite EF.

b. Les points R et S étant conjugués par rapport au cercle O, si l'on appelle P le pôle de la droite RS, le triangle PRS est autopolaire, son orthocentre est O, et P est l'orthocentre du triangle ORS (la droite SE, polaire de R, et la droite RF, polaire de S, sont deux hauteurs); dès lors, le lieu de l'orthocentre P du triangle ORS est la conique polaire réciproque, par rapport au cercle directeur O, de la parabole qui est l'enveloppe de la droite RS. Cette conique passe aux points O, E, F, A, B, C, D qui sont les pôles de droites tangentes à cette parabole; les tangentes aux points E et F sont les droites KE et KF. Cette conique est une hyperbole.

Le lieu de l'orthocentre du triangle O'RS est de même une ellipse passant aux points O', E, F, A', B', C', D'; les tangentes aux points E et F sont encore les droites KE et KF, de sorte que cette ellipse est bitangente à l'hyperbole précédente, aux points E et F.

III.

Reste la question de calcul.

La corde des contacts MN des tangentes menées du point R au cercle O passe au point E (*fig.* 2); les angles α et β, compris entre la demi-droite RK et les demi-droites RM, RN_1, sont égaux aux angles (OE, OM), (OE, ON), et l'on arrive à ce problème bien connu : *Étant donnés un cercle* O *et un point fixe* E, *on mène par* E *une sécante variable* EMN, *et l'on demande la relation entre les angles* (OE, OM), (OE, ON). On écrit que les segments OM et OE ont même projection sur la bissectrice OR de l'angle MON, et comme on a posé

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2} = \widehat{EOR}, \qquad u = \frac{\beta - \alpha}{2} = \widehat{MOR},$$

qu'on a d'ailleurs

$$\overline{OE}^2 = R^2 + R'^2,$$

cela donne

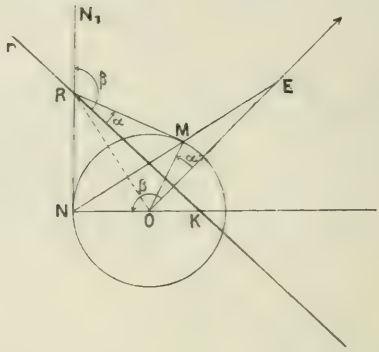
$$(1) \qquad R^2 \cos^2 u = (R^2 + R'^2) \cos^2 x,$$

ou

$$\cos^2 u = \left(1 + \frac{R'^2}{R^2}\right) \cos^2 x.$$

De même, la corde des contacts M'N' des tangentes

Fig. 2.



menées du point R au cercle O' passe au point F (*fig.* 3); les angles γ et δ, compris entre la demi-droite RK et les demi-droites RM', RN'₁, sont égaux aux angles (O'F₁, O'M'), (O'F₁, O'N'), et, comme on a posé

$$y = \frac{\gamma - \delta}{2} = \widehat{F_1 O' R}, \qquad v = \frac{\delta - \gamma}{2} = \widehat{M' O' R},$$

on a comme ci-dessus

$$(2) \qquad R'^2 \cos^2 v = (R'^2 - R^2) \cos^2 y,$$

ou

$$\cos^2 v = \left(1 + \frac{R^2}{R'^2}\right) \cos^2 y.$$

On a d'autre part (*fig.* 4)

$$\overline{KR} = \overline{KX} + \overline{XR} = \frac{\overline{OK}}{\sqrt{2}}(1 + \tang x),$$

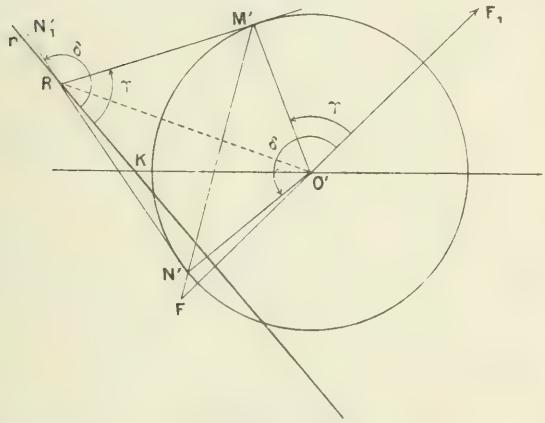
$$\overline{KR} = \overline{KY} + \overline{YR} = \frac{\overline{O'K}}{\sqrt{2}}(1 + \tang y),$$

et, par suite,

$$(3) \qquad \frac{1 - \tang x}{1 + \tang y} = \frac{\overline{O'K}}{\overline{OK}} = -\frac{\overline{O'I}}{\overline{OI}^2} = -\frac{R'^2}{R^2}.$$

Cela posé, pour vérifier que les tangentes RM, RN,

Fig. 3.



RM′, RN′ forment un faisceau harmonique, on doit vérifier la relation

$$\sin(\gamma - \alpha)\sin(\delta - \beta) + \sin(\gamma - \beta)\sin(\delta - \alpha) = 0.$$

ou, en transformant les produits en sommes,

$$\cos(\gamma - \alpha - \delta + \beta) - \cos(\gamma - \delta - \alpha - \beta)$$
$$+ \cos(\gamma - \beta - \delta + \alpha) - \cos(\gamma - \delta - \alpha - \beta) = 0,$$

ou, en transformant en produit la somme des deux cosinus de la première colonne,

$$\cos(\gamma - \delta)\cos(\beta - \alpha) - \cos(\gamma + \delta - \alpha - \beta) = 0,$$

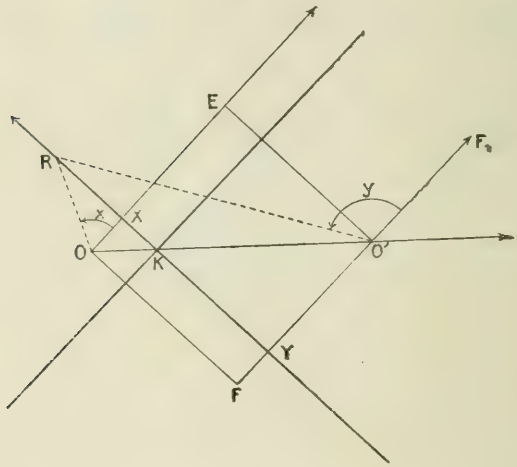
c'est-à-dire

$$\cos 2u \cos 2v - \cos(2y - 2x) = 0,$$

ou encore

$$\cos 2u \cos 2v - \cos 2x \cos 2y - \sin 2x \sin 2y = 0.$$

Fig. 4.



Au moyen des relations (1) et (2), on obtient

$$2\left(1 + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{R^2}{R'^2}\right)\cos^2 x \cos^2 y - \frac{R'^2}{R^2}\cos^2 x - \frac{R^2}{R'^2}\cos^2 y$$
$$- 2 \sin x \cos x \sin y \cos y = 0.$$

En vue d'utiliser la relation (3), on divise par le produit $\cos^2 x \cos^2 y$, ce qui donne

$$2\left(1 + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{R^2}{R'^2}\right) - \frac{R'^2}{R^2}(1 + \tang^2 y) - \frac{R^2}{R'^2}(1 + \tang x)$$
$$- 2 \tang x \tang y = 0,$$

ou

$$\left(\frac{R}{R'} - \frac{R'}{R}\right)^2 - \left(\frac{R}{R'}\operatorname{tang} x + \frac{R'}{R}\operatorname{tang} y\right)^2 = 0,$$

ou encore

$$(4) \qquad (R^2 + R'^2)^2 - (R^2 \operatorname{tang} x + R'^2 \operatorname{tang} y)^2 = 0.$$

Or la relation (3) peut s'écrire

$$R^2(1 + \operatorname{tang} x) - R'^2(1 - \operatorname{tang} y) = 0$$

ou

$$(R^2 - R'^2) + (R^2 \operatorname{tang} x + R'^2 \operatorname{tang} y) = 0,$$

ce qui assure l'exactitude de la relation (4).

La relation (3) se serait d'ailleurs présentée sous la forme précédente si l'on avait écrit

$$\overline{KX} - \overline{KY} = \overline{YR} - \overline{XR},$$

ou, en multipliant par $\sqrt{2}$,

$$\overline{OK} - \overline{O'K} = \overline{O'K} \operatorname{tang} y - \overline{OK} \operatorname{tang} x;$$

en remplaçant $\overline{OK}$ et $\overline{O'K}$ par les quantités proportionnelles R^2 et $-R'^2$, cela donne en effet

$$R^2 + R'^2 = -(R^2 \operatorname{tang} x + R'^2 \operatorname{tang} y).$$

IV (*Complément*).

Le lieu des points dont les puissances par rapport à deux cercles ont même valeur absolue et des signes contraires est un cercle ayant son centre au milieu de OO′ et dont le rayon r est donné par la formule

$$4r^2 = 2(R^2 - R'^2) - d^2;$$

ce lieu se réduit donc ici au point G. Dès lors, si l'on

mène par le point G deux droites rectangulaires, dont l'une rencontre le cercle O′ aux points α' et δ', tandis que l'autre rencontre le cercle O aux points α et δ, le quadrangle $(\alpha, \delta, \alpha', \delta')$ est un quadrangle orthogonal, puisque l'on a

$$\overline{G\alpha'} \times \overline{G\delta'} = -\overline{G\alpha} \times \overline{G\delta}.$$

En particulier, le quadrangle (A, A′, D, D′) est un quadrangle orthogonal.

Je signale la propriété suivante, qui m'a été indiquée par M. Ch. Michel : *l'enveloppe des côtés de ce quadrangle autres que ceux qui passent en* G *est la parabole enveloppe des droites* RS. Il suit de là que les deux points diagonaux de ce quadrangle autres que le point G sont sur la droite IJ, directrice de la parabole considérée.

V.

On appelle *conique covariante de Salmon* la conique F qui est le lieu des points d'où l'on peut mener à deux coniques données deux couples de tangentes formant un faisceau harmonique : cette conique passe par les points de contact des tangentes communes aux deux coniques.

La conique contrevariante de Salmon est de même la conique Φ qui est l'enveloppe des droites divisées harmoniquement par deux coniques données : cette conique touche les tangentes menées aux deux coniques en leurs points d'intersection.

La conique F se réduit à un système de deux droites passant par un sommet du triangle conjugué commun, et en même temps la conique Φ se réduit à un système de deux points situés sur le côté opposé de ce même

triangle, si l'on a

$$\Theta\Theta' - \Delta\Delta' = 0.$$

Salmon observe que, dans le cas de deux cercles, on doit avoir

$$d^2 = 2(r^2 + r'^2) \qquad \text{ou} \qquad d^2 = r^2 + r'^2.$$

Le premier cas faisait l'objet de la question proposée et le couple de points Φ est formé de deux points imaginaires situés sur la perpendiculaire à OO′ menée par G, à une distance du point G qui a pour valeur $\frac{d}{2} \times i$. Le second cas est celui de deux cercles orthogonaux : si AA′ et BB′ sont les deux tangentes communes extérieures, les deux droites F sont les cordes de contact AB et A′B′, les deux points Φ sont les centres O et O′.

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Paris.

Épreuve théorique. — *Description et usages du théodolite. Détermination de la position d'une planète sur son orbite à une époque quelconque.*

Épreuve pratique. — *Pour l'heure sidérale* $t = 6^h 41^m 3^s,50$ *à l'Observatoire de Paris de latitude* $\varphi = 48° 50' 11'',2$, *on demande l'azimut et la hauteur de l'étoile* β *Persée (Algol), dont on connaît l'ascension droite* $\alpha = 3^h 2^m 7^s,01$ *et la déclinaison boréale* $\delta = 10° 35' 53'',8$.

(Juillet 1907.)

Poitiers.

Épreuve écrite. — *Les corrections de parallaxe. Parallaxe diurne. Parallaxe annuelle.*

Épreuve pratique. — *Soient* φ *la hauteur du pôle en un lieu donné,* δ *la déclinaison d'une étoile* S, O *et* O′ *les deux points de l'horizon diamétralement opposés à ceux où l'étoile se lève et où elle se couche; montrer que l'aire du triangle sphérique* SOO′ *est constante et la calculer dans l'hypothèse*

$$\delta = 18^\circ 15' 27'', 5, \qquad \varphi = 43^\circ 18' 17'', 5.$$

(Novembre 1907.)

Rennes.

Épreuve écrite. — *Coordonnées géocentriques et parallaxes.*

Épreuve pratique. — *On fait deux observations d'une planète à dix jours d'intervalle. On en déduit, comme anomalies excentriques correspondantes,*

$$u_1 = 50^\circ 23' 42'',$$
$$u_2 = 57^\circ 48' 17''.$$

L'excentricité de l'orbite étant égale à $\frac{1}{4}$, *calculer la durée de révolution de la planète autour du Soleil.*

(Juin 1908.)

Épreuve écrite. — 1° *Établir l'équation de Képler dans le mouvement elliptique*

$$u - e \sin u = n(t - t_0),$$

en admettant les lois de Képler pour le problème des deux corps.

2° *Détermination de la position à un instant quelconque, en supposant connus les éléments de l'orbite elliptique.*

3° *Détermination des coordonnées rectangulaires à un instant quelconque dans un système d'axes relatif choisi.*

Épreuve pratique. — *En un lieu dont la latitude boréale est*

$$\varphi = 48^\circ 59' 10'',$$

on observe la hauteur du Soleil; soit

$$h = 31^\circ 10' 17''$$

cette hauteur corrigée de la réfraction.

La déclinaison du Soleil étant

$$\delta = 15^\circ 25' 12'',$$

calculer l'heure de l'observation, suivant que l'opération a été faite avant ou après midi.

(Novembre 1908.)

CERTIFICAT D'ANALYSE SUPERIEURE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Ire QUESTION (COURS). — *Réduction de l'intégrale générale elliptique de première espèce à la forme normale de Weierstrass.*

IIe QUESTION. — *Le rayon de courbure* R, *en un point* M *d'une certaine courbe plane* C, *est lié à l'ordonnée y de ce point par la relation*

$$R^2 = \frac{a^4}{4y^2},$$

où a est une constante donnée.

Calculer les coordonnées du point M *en fonction de l'arc* M_0M *de la courbe* C, *compté à partir d'un point fixe* M_0 *de cette courbe, en employant les notations de Jacobi.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un quadrilatère plan* LMNO *se déforme, ses côtés conservant des longueurs constantes. Les angles de ce quadrilatère ayant respectivement pour sommets* L, M, N, O, *étant désignés par* λ, μ, ν, ω, *satisfont aux*

relations différentielles

$$\frac{d\lambda}{\mathrm{MNO}} = \frac{-d\mu}{\mathrm{LNO}} = \frac{d\nu}{\mathrm{LMO}} = \frac{-d\omega}{\mathrm{LMN}},$$

où les dénominateurs désignent les aires des triangles MNO, *etc.*

(*On suppose que, en parcourant dans un sens déterminé le périmètre du quadrilatère, les sommets se présentent dans l'ordre* L, M, N, O.)

En partant de ces relations (qu'on pourra admettre), on demande d'exprimer

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}, \quad \operatorname{tang}\frac{\mu}{2}, \quad \operatorname{tang}\frac{\nu}{2}, \quad \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$$

en fonction d'un paramètre u défini en désignant par du la valeur commune des rapports précédents.

On supposera que les côtés ont respectivement pour mesure les nombres suivants :

$$\mathrm{LM} = 6, \qquad \mathrm{MN} = 3, \qquad \mathrm{NO} = 3, \qquad \mathrm{OL} = 4.$$

On prendra comme position initiale du quadrilatère celle pour laquelle les côtés MN *et* NO *sont en ligne droite, le quadrilatère se réduisant à un triangle isoscèle.*

Nota. — *Dans les formules différentielles données ci-dessus, les dénominateurs sont tous positifs lorsque le quadrilatère est convexe.*

(Juillet 1908.)

Grenoble.

Composition. — *On donne la surface représentée par les équations*

$$x = \sin\theta \sin\varphi,$$
$$y = \sin\theta \cos\varphi,$$
$$z = \cos\theta + \mathrm{L}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} + f(\varphi),$$

θ *et* φ *étant deux paramètres variables et* f *une fonction de* φ *seulement.*

1° *Montrer qu'une première famille de lignes de cour-*

bure est formée par des courbes planes (C_1) *et la deuxième famille par des courbes sphériques* (C_2).

2° *Montrer qu'il y a une ligne de courbure* (Γ) *qui ne fait partie, en général, d'aucune de ces deux familles.*

Que doit être f pour que Γ *soit une courbe* $\theta = \text{const.}$?

Quelle est dans ce cas la forme de la projection des courbes (C_2) *sur le plan de xy?*

3° *Que doit être f pour que les plans des courbes* C_1 *coupent tous la surface sous le même angle? Quelle est dans ce cas la forme de la projection des courbes* C_2 *sur* xOy?

4° *Dans quel cas les courbes* C_2 *sont-elles des courbes planes?*

Épreuve pratique. — *Construire la courbe*

$$x = \frac{1}{pu}, \qquad y = \frac{1}{p'u - 6},$$

sachant que p vérifie l'équation

$$(p'u)^2 = (2pu + 9)(2pu - 1)(pu - 4).$$

Degré de la courbe. Asymptotes.

Comment évaluera-t-on l'aire comprise entre Ox, *la courbe et la droite* $x = \frac{1}{4}$?

(Juillet 1908.)

Paris.

Épreuve théorique. — I. 1° *Étant considérée l'équation aux dérivées partielles d'ordre n*

$$A_0 \frac{d^n z}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}\, dy} + \ldots + A_n \frac{d^n z}{dy^n} = F,$$

où les A *sont des fonctions des variables indépendantes x et y, le second membre* F *ne contenant que des dérivées jusqu'à l'ordre* $n - 1$, *comment est-on conduit à la notion de caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles?*

2° *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles de*

troisième ordre

$$\frac{d^3 z}{dx\, dy^2} - \frac{d^3 z}{dx^2\, dy} = f(x, y),$$

où f est une fonction donnée de x et y, montrer qu'il existe une intégrale et une seule de cette équation, définie dans l'angle xOy, continue ainsi que ses dérivées premières et satisfaisant aux conditions

$$z = X_0(x), \qquad \frac{dz}{dy} = X_1(x) \qquad \text{sur } Ox,$$

$$z = Y_0(y), \qquad \frac{dz}{dx} = Y_1(y) \qquad \text{sur } Oy,$$

les X et Y satisfaisant pour $x = 0$, $y = 0$ à des conditions qu'on obtient immédiatement. Qu'arrivera-t-il en général pour les dérivées secondes dans l'angle xOy?

3° *Appliquer le résultat précédent à l'équation*

$$\frac{dx\, dy^2}{d^3 z} + \frac{dx^2\, dy}{d^3 z} = 1$$

en supposant que

$$X_0 = 1, \qquad X_1 = 0,$$
$$Y_0 = 1, \qquad Y_1 = 0.$$

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles à trois variables indépendantes :*

$$\frac{d_3 u}{dx\, dy\, dz} = c(x, y, z)\, u.$$

Quelle est l'équation adjointe de cette équation et qu'entend-on par solution fondamentale de cette équation adjointe relative au point $(x_0 y_0 z_0)$?

Montrer ensuite comment la méthode de Riemann peut être étendue à l'équation (1). Dans le cas où C est constant, former explicitement la solution fondamentale de l'équation adjointe.

Épreuve pratique. — *Trouver l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{d^4 z}{dx^4} - 2\frac{d^4 z}{dx^2\, dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} = 0.$$

On commencera par mettre le premier membre sous la forme d'un produit de facteurs, conformément à une théorie générale. (Juillet 1907.)

I. Épreuve théorique. — 1° *Démontrer qu'il existe une fonction continue* $\varphi(x)$ *et une seule satisfaisant à l'équation*

$$(1) \qquad \varphi(x) + \int_a^x f(x, s)\varphi(s)\,ds = \varphi(x),$$

a étant une constante et $f(x, s)$ *ainsi que* $\psi(x)$ *étant des fonctions continues données.*

En déduire l'existence d'une solution unique $\varphi(x)$ *de l'équation*

$$(2) \qquad f(x) = \int_0^x \varphi(s)\psi(s, x)\,ds,$$

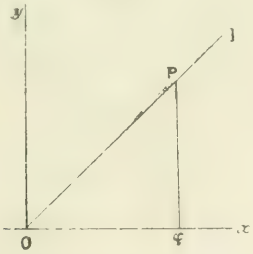
dans l'intervalle (0α); *les deux fonctions continues* $f(x)$ *et* $\psi(s, x)$ *sont données. On suppose que* $f(x)$ *s'annule pour* $x = 0$, *et que* $\psi(x, x)$ *est différent de zéro dans l'intervalle indique.*

2° *Étant donnée l'équation*

$$(3) \qquad \frac{d^2 z}{dx\,dy} + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} + cz = 0$$

et une parallèle à Oy *rencontrant en* P *et* φ *la bissectrice*

Fig. 1.

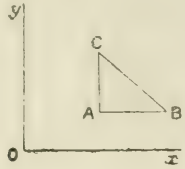


OI $(y = x)$ *et l'axe* Ox, *la recherche des intégrales* z *de cette équation prenant sur* OP *et sur* Oφ *des valeurs données peut se faire en cherchant les valeurs de ses dérivées* $\frac{dz}{dx}$ *et* $\frac{dz}{dy}$ *sur* OP.

Montrer, en se servant de la méthode de Riemann classique dans la théorie de l'équation (3), *que cette recherche revient à l'intégration d'une équation fonctionnelle de la forme* (2).

N. B. *On rappelle la formule de Riemann, donnant*

Fig. 2.



une intégrale de (3) *au moyen de sa valeur et des valeurs de ses dérivées premières sur une courbe* CB,

$$z_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} + \int_C^B M\,dy - N\,dx,$$

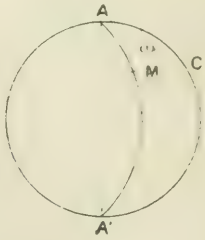
où u désigne la solution fondamentale de l'équation adjointe relative au point A *et où l'on a posé*

$$M = auz + \frac{1}{2}\left(u\frac{dz}{dy} - z\frac{du}{dy}\right),$$

$$N = buz + \frac{1}{2}\left(u\frac{dz}{dx} - z\frac{du}{dx}\right).$$

2° Épreuve pratique. — *Sur une sphère de rayon* 1, *on*

Fig. 3.



rapporte la position d'un point aux coordonnées polaires ρ *et* ω *relatives à un point* A *de la sphère et à un grand*

cercle C *passant par ce point, de telle sorte que*

$$\text{arc}\,AM = \rho, \qquad \text{angle}\,\widehat{MAC} = \omega.$$

Trouver l'aire balayée par le rayon vecteur AM *quand le point* M *décrit la courbe représentée par l'équation*

$$\omega = 4\rho,$$

ω *variant de* 0 *à* 2π. (Octobre 1907.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

656.

(1866, p. 266.)

Démontrer géométriquement que la division de la circonférence en sept parties égales se ramène à la trisection de l'angle dont la tangente est égale à $3\sqrt{3}$.

(Mathew Collins.)

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Voici une démonstration analytique.

Soit AM l'arc d'un heptagone régulier convexe ou étoilé inscrit dans un cercle du centre O, et posons

$$\widehat{AOM} = x:$$

on doit avoir

$$7x = 2k\pi, \qquad \cos 7x = 1,$$

ou, en désignant $\cos x$ par y,

$$(y-1)(8y^3+4y^2-4y-1)^2 = 0.$$

Ainsi, les valeurs des quantités

$$\cos\frac{2\pi}{7}, \quad \cos\frac{4\pi}{7}, \quad \cos\frac{6\pi}{7}$$

sont les racines de l'équation

$$8y^3 + 4y^2 - 4y - 1 = 0.$$

et l'on trouve

$$y = \frac{\sqrt{7}}{3}\cos\frac{t}{3} - \frac{1}{6},$$

$$\cos t = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Si α est un angle dont le cosinus est $\frac{1}{2\sqrt{7}}$, on a donc

$$(1) \qquad \cos\frac{2k\pi}{7} = y_h = \frac{\sqrt{7}}{3}\cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{2h\pi}{3}\right) - \frac{1}{6};$$

en prenant α entre O et $\frac{\pi}{2}$, on peut écrire

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\alpha = 3\sqrt{3}.$$

L'auteur de la question donne la construction suivante : « Soient A'OA et B'OB deux diamètres rectangulaires du cercle; prendre le point O' au $\frac{1}{6}$ de OA', porter sur OB une longueur OD égale à l'apothème de l'hexagone régulier inscrit au cercle et tracer avec O' comme centre l'arc de cercle DE_0F_0D' moindre qu'une demi-circonférence jusqu'à OB'; si les points E_0 et F_0 partagent cet arc en trois parties égales, la droite E_0F_0 rencontre la circonférence primitive en deux points M_0 et N_0 tels que chacun des arcs AM_0 et AN_0 est égal au $\frac{1}{7}$ de la longueur de cette circonférence. »

On a en effet

$$\operatorname{tang}\alpha = 3\sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{6}} = \frac{OD}{O'O},$$

$$\alpha = \widehat{AO'D}, \qquad \frac{\alpha}{3} = \widehat{AO'E_0};$$

d'ailleurs, avec OA = 1,

$$O'D = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Dès lors, si $E_0E_1E_2$ est le triangle équilatéral inscrit au

cercle de centre O′, on a

$$\cos\frac{2k\pi}{7} = y_h = O'E_h \cos\widehat{AO'E_h} - O'O = OP_h,$$

en appelant P_h la projection du point E_h sur A′A. Dès lors, en menant par les points P_h des perpendiculaires au diamètre A′A jusqu'à la circonférence primitive, on obtient des points M_h et N_h tels que les angles $\widehat{AOM_h}$, par exemple, sur les angles $\frac{2k\pi}{7}$. Si chaque point M est pris du même côté de A′A que le point E correspondant, on a

$$h = 0, \quad 1, \quad 2,$$
$$k = 1, \quad 3, \quad -2,$$

ou

$$k \equiv 2h + 1 \qquad (\text{mod } 7).$$

Les sept points A, M_0, N_2, M_1, ... sont les sommets des hexagones considérés.

2098.

(1908, p. 384.)

Construire une hyperbole connaissant en position un axe, un cercle bitangent dont le centre est sur l'axe, une direction asymptotique et les points de rencontre avec l'axe de la tangente et de la normale en un point de l'hyperbole. (Gilbert.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Étant données les coniques bitangentes à un cercle donné O *ayant un axe fixe passant par* O *et des directions asymptotiques fixes, le lieu des pieds des normales à ces coniques issues d'un point de l'axe est un cercle concentrique au cercle* O.

Soient O l'origine, Oy l'axe fixe, q l'ordonnée du point considéré, V l'angle des asymptotes avec l'axe; l'équation des coniques considérées est

$$x^2 \sin^2 V - y^2 \cos^2 V + 2\mu y - \mu^2 - R^2 \sin^2 V = 0;$$

la corde joignant les pieds des normales issues du point considéré est $y = \mu + q \sin^2 V$; éliminons μ, il vient

$$(C) = x^2 + y^2 - q^2 \sin^2 V - R^2 = 0.$$

Ceci posé, si N est le pied de la normale, T le pied de la tangente au point M de l'hyperbole à contruire sur l'axe donné, M sera à l'intersection du cercle de diamètre NT et du cercle (C). L'axe radical de ces deux cercles rencontre la perpendiculaire menée à N à une direction asymptotique en un point R. appartenant à une asymptote et l'hyperbole est déterminée.

La seule condition de possibilité est l'intersection réelle des cercles (C) et NT.

2101.

(1908, p. 478.)

La quintique gauche qui est l'intersection partielle d'une quadrique et d'une surface du troisième ordre ayant une droite commune dépend de 20 *paramètres.*

(G. F.)

SECONDE SOLUTION

Par L'AUTEUR.

La solution donnée à la page 189 du présent Volume aurait besoin d'être complétée : toute quintique tracée sur une quadrique, et représentée par une relation de la forme indiquée, est-elle une quintique de l'énoncé?

Voici une autre démonstration. Les équations de la quadrique et de la surface du troisième ordre étant

$$\alpha\gamma - \beta\delta = 0, \qquad \alpha S - \beta T = 0,$$

la quintique est encore sur la surface du troisième ordre

$$\gamma T - \delta S = 0,$$

qui ne contient pas la droite D; l'équation générale des surfaces du troisième ordre passant par la quintique est ainsi (mais il y aurait lieu d'insister)

$$(\alpha S - \beta T) + k(\gamma T - \delta S) + \theta(\alpha\gamma - \beta\delta) = 0,$$

θ étant une fonction linéaire des coordonnées; une telle surface dépend donc de 5 paramètres. Dès lors, le nombre des

paramètres dont dépend la quintique est

$$(9 + 19 - 3) - 5 \quad \text{ou} \quad 20.$$

On peut écrire l'équation ci-dessus sous la forme

$$[(\alpha - k\delta)S - (\beta - k\gamma)T] + \theta(\alpha\gamma - \beta\delta) = 0.$$

On met ainsi en évidence la droite D_1 commune à la quadrique et à la surface du troisième ordre considérée.

2105

(1908, p. 179.)

Les tangentes en trois points A, B, C *d'une parabole de foyer* F *forment un triangle* A′, B′, C′. *Démontrer les relations*

$$FA.\overline{FA'}^2 = FB.\overline{FB'}^2 = FC.\overline{FC'}^2,$$

$$FA.FB.FC = FA'.FB'.FC'.$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. J. Rose.

Les triangles semblables FA′B et FCA′ donnent immédiatement

$$\overline{FA'}^2 = FB.FC.$$

Donc

$$FA.\overline{FA'}^2 = FA.FB.FC.$$

La même relation existe pour les autres quantités analogues; par suite la première relation est vérifiée. De plus

$$\overline{FA'}^2.\overline{FB'}^2.\overline{FC'}^2 = \overline{FA}^2.\overline{FB}^2.\overline{FC}^2,$$

ce qui démontre la seconde relation.

Autres solutions par MM. Bouvaist, G. Pélissier, V. Retali, Lez.

2106

(1908, p. 180.)

Si l'on considère les paraboles qui sont tangentes en O *à une droite* OT *et qui ont la corde normale* OA *fixe :*

1° *Le lieu du foyer de ces paraboles est une cissoïde droite;*

2° *La directrice enveloppe une parabole.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. G. Pélissier.

1° Si l'on prend OA pour axe des x, OT pour axe des y et qu'on pose $OA = a$, l'équation générale des paraboles considérées dans l'énoncé est

$$(y - \lambda x)^2 - \lambda^2 a x = 0.$$

L'axe est la droite

$$(1) \qquad 2(m^2 + 1)(y - \lambda x) + a\lambda^3 = 0.$$

Le foyer F est sur la droite symétrique par rapport à OA de la direction de l'axe ; cette droite a pour équation

$$(2) \qquad y + \lambda x = 0.$$

Le lieu du foyer s'obtient en éliminant λ entre (1) et (2); on obtient l'équation

$$4x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$$

qui représente une cissoïde ayant son point de rebroussement en O.

2° La projection de O sur la directrice qui est symétrique du foyer par rapport à la tangente fixe OT décrit la cissoïde symétrique du lieu de F par rapport à OT; la directrice enveloppe donc la podaire négative de cette dernière cissoïde par rapport à O, c'est-à-dire une parabole de sommet O et d'axe OA.

Autres solutions par MM. Bouvaist, Lez, V. Retali, J. Rose, M. Têtu.

QUESTION.

2140. D'un point P on mène les trois normales à une parabole. Soient P′ le symétrique du point P par rapport à l'axe de la parabole; G le centre de gravité du triangle ayant pour sommets les centres de courbure situés sur les trois normales; R le point de rebroussement de la développée. Démontrer que les trois points R, P′, G sont en ligne droite, et que l'on a $RP' = P'G$. (G. Cuny.)

[K¹9a]

SUR LES LIGNES BRISÉES ET LES AIRES POLYGONALES DANS LE PLAN, A PROPOS DE LA DÉCOMPOSITION D'UN POLYGONE EN TRIANGLES;

PAR M. CH. MÉRAY.

§ I. — LIGNES BRISÉES PLANES, EN GÉNÉRAL.

1. En Géométrie plane, la théorie des aires à contours courbes dérive (par la méthode des limites) de celle des aires polygonales, et, dans cette dernière, la doctrine traditionnelle tire la mesure de tous les polygones de celle des rectangles, par l'intermédiaire des parallélogrammes, puis des triangles, sans partir d'une définition catégorique, sans produire le moindre argument à l'appui du fait essentiel, que *toute aire polygonale est décomposable additivement en celles de triangles dont le nombre est limité.*

Mes *Nouveaux Éléments de Géométrie* (éditions de 1903, de 1906) ont procédé autrement : on y trouve une définition précise des aires triangulaires, qui conduit à celle des aires polygonales quelconques, et tout est ramené à la comparaison numérique des premières, opérée directement. Pour faire de celles-ci les segments primordiaux du plan indéfini considéré comme champ aréolaire, pour transporter ainsi au triangle le rôle fondamental que les habitudes classiques avaient toujours conféré au rectangle, j'ai eu des motifs dont la validité demeure entière à mes yeux : d'abord, l'intervention forcée, dans la matière, du principe rappelé à

l'instant, intervention affirmant déjà, par cette nécessité d'ôter presque immédiatement le pas au rectangle pour le donner au triangle, la simplicité relative du dernier et son irréductibilité; ensuite, la facilité majeure du maniement des aires triangulaires, résultant de ce qu'un triangle reste encore un triangle après un déplacement arbitraire d'un sommet, tandis qu'il n'en est pas ainsi pour un rectangle; etc.

Ce tour d'idées renforce le relief du principe en question et rend plus désirable la substitution d'une démonstration en règle aux menues constatations empiriques qui ont été son seul fondement jusqu'ici. Par discrétion dans l'emploi de considérations d'un genre inaccoutumé, dont l'utilité a été parfois contestée, j'ai restreint dans mon Ouvrage cité, puis supprimé celle que je possédais alors. Une meilleure que je viens d'apercevoir pourra intéresser ceux qui ne refusent pas leur attention à l'approfondissement des choses mathématiques. On ne se récriera pas sur sa longueur, si l'on en détache ses préliminaires, en remarquant que leur portée ne s'arrête pas à l'appui qu'elle y trouve.

Effectivement, ces diverses considérations paraissent donner, à la conception des lignes brisées planes et figures connexes, une précision et une netteté qui lui manquaient. Si elles n'ajoutent presque rien à la visibilité de faits devenus quasi intuitifs à force d'avoir été aperçus empiriquement et retrouvés en jeu dans les applications les plus vulgaires de la Géométrie, elles les coordonnent et les expliquent.

Enfin, elles apportent une justification de plus aux choix des postulats *généraux* très simples qui m'ont permis d'enchaîner étroitement et uniformément tous les faits en Géométrie *de position*, faits innombrables et pourtant demeurés jusqu'à eux sans autre base,

chacun, que des suggestions *d'aventure*, reçues de *quelque dessin* par les yeux *du corps*.

Des élargissements appropriés les étendent naturellement aux faits similaires de l'espace; mais je n'irai pas au delà de cette allusion.

2. Il est utile de revenir un instant sur quelques généralités.

I. Nos spéculations rouleront exclusivement sur des droites et des lignes brisées (217* *et suiv.*) (¹), toutes dans un même plan commun, les dernières continues (109*), sans côtés nuls, déchevêtrées et composant trois variétés à distinguer :

1° *Lignes ouvertes*, *terminées*, dites *chemins* (brisés ou polygonaux). Les côtés d'une telle ligne sont en nombre limité $\varkappa$; en outre, elle se termine à *deux extrémités* dont chacune est le bout d'un côté *extrême*, par lequel celui-ci n'est soudé à aucun contigu. Quand $\varkappa > 1$, il y a $\varkappa - 1$ points de soudure de deux côtés contigus, qui sont les *sommets* proprement dits de la ligne (*cf.* III, *inf.*). Quand $\varkappa = 1$, elle se réduit à un simple segment rectiligne et ne présente aucun sommet.

Presque toujours, les extrémités sont distinctes. Mais leur confusion accidentelle ne modifie pas la nature de la ligne, pourvu qu'on ne la conçoive pas comme ci-après (3°, *inf.*), c'est-à-dire qu'on rompe par la pensée la soudure existant en fait entre les côtés extrêmes, et qu'on fasse abstraction du nouveau sommet qui interviendrait autrement.

(¹) Un astérisque marquera les renvois faits à mon Ouvrage nommé tout à l'heure, 3e édition, 1906; deux parfois viseront la précédente, de 1903.

2° *Lignes ouvertes, interminées dans les deux sens.* — Dans cette sorte, tout côté de la ligne est soudé par ses bouts à deux autres contigus, ceci rendant infinis le nombre des côtés, celui des sommets, et faisant disparaître les extrémités. En outre, nous supposerons expressément, que *la ligne présente, en nombre toujours limité, des côtés dont chacun contiendrait quelque point du périmètre ou de l'aire d'un triangle donné quelconque* (**277***, I).

Cette restriction est remplie d'elle-même pour un chemin (1°) et pour un contour (3°, *inf.*).

3° *Lignes fermées,* ou *contours* (polygonaux), ou *polygones.* — Cette variété rentre dans la première (1°), mais avec les particularités essentielles, que les extrémités de la ligne se confondent, que leur fusion est considérée, non comme une double extrémité, mais comme un $\varkappa^{\text{ième}}$ sommet sans distinction avec les autres, et que, dans un sens quelconque, un point mobile peut la décrire indéfiniment sans buter à une extrémité (**217***).

En dédoublant alors par la pensée un point quelconque de la ligne, on en fait un chemin ayant pour extrémités le point choisi et son dédoublement (1°, *in fine*).

Les diverses conditions restrictives posées dans cet alinéa sont absolues, et seront habituellement sous-entendues.

II. Dans chacune de nos lignes, nous ne considérerons que des angles *topographiques,* c'est-à-dire inférieurs au replet (**137***, II), et leur déchevêtrement essentiel en exclut les angles nuls, n'y laisse en conséquence que des angles saillants, rentrants ou neutres (**134***).

Les deux qui lui sont attribuables en un même sommet sont adjacents extérieurement par leurs deux côtés à la fois [replémentaires en conséquence (137*, III)], et nous caractériserons cette disposition mutuelle en les disant *biadjacents*.

III. Dans une ligne brisée quelconque ...JKLMN..., quand un angle L′ de sommet L est neutre, son biadjacent L″ (II) l'est aussi, les côtés [LK], [LM] de la ligne, qui font partie de ceux de ces angles, se prolongent mutuellement, leur assemblage KLM est un simple segment rectiligne [KM], et la ligne ...JKMN... a, de moins que la proposée, un sommet, deux angles et un côté, tout en lui étant graphiquement identique. C'est dans ce sens que, dans celle-ci, on peut *supprimer* un tel sommet, de tels angles; *fusionner* une telle paire de côtés; dire de tels objets *facultatifs;* les qualifier, par opposition, d'*essentiels* quand ils ne sont pas facultatifs.

Inversement, tout point marqué à l'*intérieur* d'un côté d'une ligne brisée peut en être regardé comme un sommet additionnel, l'enrichissant de deux angles biadjacents neutres, dédoublant le côté considéré en deux autres; et tous ces nouveaux objets peuvent être dits *facultatifs* encore.

Arbitrairement donc, on pourra ainsi multiplier les angles et côtés, réduire les longueurs de ceux-ci, la ligne ne fût-elle qu'un simple segment rectiligne, transformer une droite tout entière en une ligne brisée [interminée (I, 2°)].

3. Des définitions spéciales sont ensuite à poser.

I. 1° Quand un angle non nul a été *piqueté,* c'est-à-

dire précisé dans sa conception, par le choix de son *premier* côté OA et de son *deuxième* OB, et que, par des demi-droites OM′, OM″, ..., $\overline{O}M^{(k)}$ rayonnant de son sommet, il a été divisé en parties *saillantes* AOM′, M′OM″, ..., $M^{(k)}OB$, dont chacune est contiguë extérieurement à la précédente (ou à la suivante) par leur côté commun, ces derniers piquetages rendent tous ces angles partiels visiblement homotaxiques deux à deux, puis à l'angle originaire piqueté AOB quand il est saillant (178**).

2° Cette observation fournit, aux définitions du lieu cité, un complément alors omis parce qu'il n'y était pas utile : piquetés $A_1O_1B_1$, $A_2O_2B_2$, deux angles quelconques (chacun saillant, rentrant, neutre, même supérieur au replet) sont *homotaxiques*, s'il en est ainsi pour deux parties saillantes de l'un et de l'autre, piquetées comme il vient d'être dit (1°); dans le cas contraire, ils sont *antitaxiques*.

D'après cela, on constatera bien facilement qu'il y a toujours antitaxie entre deux angles quelconques, quand ils sont biadjacents (2, II) et pourvus de piquetages identiques, AOB par exemple pour l'un, et AOB encore pour son replémentaire.

II. 1° Dans une même ligne $\mathcal{L}$, supposée d'abord ouverte (2, I, 1°), considérons deux angles de sommets quelconques O, U, ses côtés [OM], [ON] se soudant en O, et [US], [UT] soudés en U; attribuons ensuite à ces angles des piquetages MON, SUT, déterminés par la condition, visiblement licite et étroite, que sur deux côtés homologues, OM, $\overline{U}S$ pour fixer les idées, les côtés [OM], [US] de la ligne soient toujours parcourus, l'un et l'autre, soit dans les sens indiqués par ces notations, soit dans les sens simultanément opposés,

par un point mobile décrivant la ligne dans tout sens constant donné (217*). Selon que de tels piquetages auront fait naître l'homotaxie ou l'antitaxie entre ces angles (I, 2°), nous dirons que, sur la ligne, ils sont *enchaînés* dans le premier cas, *déchaînés* dans le second [1].

Comme, en un sommet quelconque U, les deux angles de la ligne sont toujours antitaxiques (sous un même piquetage) (*Ibid.*), l'un d'eux, d'après ce qui vient d'être dit, sera toujours enchaîné, l'autre déchaîné à un même angle donné en tout sommet O, distinct ou non de U. Des angles en des sommets, essentiels ou facultatifs, (2, III), à prendre en considération pour l'étude de la ligne, on formera donc, cela sans omission, ni ambiguïté, ni répétition, deux groupes distincts, en plaçant : dans l'un, un angle quelconque donné O_1 et tous ses enchaînés U_1, I_1, ..., dans l'autre, tous les déchaînés, O_2, U_2, I_2, ..., du même angle O_1, à commencer par son biadjacent O_2. Nous nommerons ces groupes les deux *chaînes* des angles de la ligne.

On aperçoit immédiatement : *que, dans chaque chaîne, les angles sont respectivement les biadjacents de ceux de mêmes sommets dans l'autre chaîne, partant en nombre égal; qu'un angle quelconque est enchaîné à chacun de ceux de sa chaîne, mais déchaîné à chacun de ceux de l'autre chaîne; qu'entre deux angles donnés, il y a toujours enchaînement*

---

[1] L'identité ou opposition des directions giratoires des angles ainsi piquetés fournirait un criterium équivalent, qui pourrait sembler plus simple; mais il serait sans prise sur les angles solides d'une surface polyédrique, parce que la génération de leurs intérieurs par rotation *proprement dite* n'existe pas pour ces derniers. C'est pourquoi j'ai préféré des considérations qui, elles, sont extensibles à l'espace, moyennant certaines modifications naturelles dont l'indication, toutefois, sortirait du cadre de ce travail.

ou déchaînement, selon que les relations de ce genre entre chacun d'eux et un même autre sont homonymes ou hétéronymes.

2° Semblable construction pour les chaînes d'une ligne interminée (2, I, 2°), sauf à la réduire à un chemin contenant les sommets de tous les angles impliqués dans la question.

Si la ligne $\mathcal{L}$ est fermée (*Ibid.*, 3°), on en forme les deux chaînes comme ci-dessus (1°), après l'avoir transformée en un chemin, par son ouverture opérée en un quelconque de ses points, autre que ses sommets pris en considération.

3° *Quand deux angles de notre ligne*, O_x, O_y, *sont neutres, avec des sommets* O, U, *tous deux intérieurs à un même côté* [MN] *de celle-ci, les demi-plans d'arête commune* MN, *qui constituent leurs intérieurs, sont identiques s'il y a enchaînement entre ces angles, opposés s'il y a déchaînement.*

Soient O_1, U_1 ces deux angles supposés d'abord enchaînés, puis $\overline{O}o$, $\overline{U}u$ des demi-droites rayonnant arbitrairement de leurs sommets dans leurs intérieurs. Comme, sous les piquetages MON, MUN, ces angles sont visiblement homotaxiques (1°), il en est de même pour leurs parties MO*o*, MU*u* (I, 2°). Les seconds côtés de celles-ci, $\overline{O}o$, $\overline{U}u$, tombent donc dans un même demi-plan d'arête MN, parce qu'elles sont saillantes et que leurs premiers côtés, OM, UM, sont appliqués sur l'arête dans des directions identiques (178**). Avec ce demi-plan, se confondent donc les intérieurs des angles O_1, U_1.

S'il s'agit de deux angles déchaînés O_1, U_2, le demi-plan de U_2, opposé à celui de U_1 son biadjacent déchaîné, l'est par là à celui de O_1 identique à celui de U_1 comme nous venons de le constater.

III. Une notion liée étroitement à la précédente (II) interviendra fréquemment dans nos spéculations.

Quand une demi-droite issue d'un point quelconque M d'une ligne n'est pas appliquée sur un côté aboutissant à ce point, elle est intérieure à quelqu'un, M_x, des angles de la ligne en M (133*, II), et, combinée avec le déchevêtrement de celle-ci, la restriction générale du n° 2, I, 2°, assure la possibilité de la limiter à un vecteur [M*m*] assez petit pour n'avoir que son origine M sur la ligne. Il nous sera très commode de nommer un tel vecteur un *cil* de la ligne, *intérieur* à l'angle M_x, ayant M pour *pied*, *m* pour *pointe;* de dire encore que deux cils sont *enchaînés* ou *déchaînés* en même temps que les angles auxquels ils sont intérieurs (II, 1°, 2°).

IV. 1° Désignant par $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$ deux lignes brisées non identiques, de variétés quelconques (2, I), puis par $\mathfrak{A}$ une troisième ouverte, terminée, et ne contenant aucune de leurs extrémités (s'il en existe pour l'une ou l'autre), nous dirons que $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$ *s'abordent en* $\mathfrak{A}$, quand cette dernière se trouve être une partie commune aux deux premieres. Dans ces conditions, l'étendue de l'abord $\mathfrak{A}$ ne peut atteindre la totalité, ni de $\mathfrak{L}'$, ni de $\mathfrak{L}''$, et ses extrémités, s'il ne se réduit à un point, ne sont jamais confondues, puisque leur confusion serait un enchevêtrement pour ces deux lignes.

Mêmes dénominations, si cette partie commune n'était qu'un simple point $\mathfrak{A}$, *non extrême pour* $\mathfrak{L}'$, *ni pour* $\mathfrak{L}''$; nous la regarderions comme un segment nul, ayant pour extrémités deux dédoublements de $\mathfrak{A}$.

On remarquera qu'un abord entre une ligne brisée et une droite [considérée comme telle (2, III)] ne peut consister qu'en un simple point (ce qui est le plus fréquent), ou bien en la totalité d'un côté (essentiel).

2° Dans le premier des deux cas ci-dessus (1°), nous donnerons à l'abord $\mathcal{A}$ la notation plus explicite CD...EF, et la restriction complémentaire de notre définition fait, de ses extrémités C, F, deux sommets (non extrêmes), facultatifs au besoin (2, III), tant de $\mathcal{L}'$ que de $\mathcal{L}''$. A cause de cela, ces lignes prolongeront d'abord CD...EF : au delà de C, par deux côtés [CB'], [CB''] respectivement, dont les directions sont nécessairement différentes (sans parler de ceux pouvant exister au delà d'eux dans chacune), puis, au delà de F, par deux côtés [FG'], [FG''] en pareille disposition mutuelle. Il y a donc en C, F : appartenant à $\mathcal{L}'$, des angles γ', φ' auxquels les demi-droites $\overline{C}B''$, $\overline{F}G''$ sont respectivement intérieures, et, appartenant à $\mathcal{L}''$, des angles γ'', φ'' auxquels les demi-droites $\overline{C}B'$, $\overline{F}G'$ le sont pareillement.

Dans le second cas, rien n'existe, de l'abord CD...EF, que les extrémités C, F confondues en un seul point (CF) commun à nos deux lignes, à titre de sommet (non extrême, éventuellement facultatif). De cette fusion partent des côtés [CB'], [FG'] de $\mathcal{L}'$ et [CB''], [FG''] de $\mathcal{L}''$, sans identité encore entre les directions, tant de [CB'], [CB''] que de [FG'], [FG''] ; et les demi-droites $\overline{C}B''$, $\overline{F}G''$ sont respectivement intérieures à des angles γ', φ', de sommet (CF) dans $\mathcal{L}'$, convenablement choisis, ainsi que les demi-droites $\overline{C}B'$, $\overline{F}G'$ à certains angles γ'', φ'' de même sommet dans $\mathcal{L}''$.

Cela posé : *Il y a toujours homonymie entre la relation des angles γ', φ' et celle de γ'', φ''* (II).

Pour les angles

$$\gamma', \quad \varphi',$$
$$\gamma'', \quad \varphi''$$

du premier des cas distingués à l'instant, leurs pique-

tages, semblablement placés dans le Tableau

$$(1)\qquad \begin{cases} B'CD, & G'FE, \\ B''CD, & G''FE, \end{cases}$$

impose visiblement l'antitaxie à ceux de chaque même file verticale, parce que chaque angle y a toujours son premier côté intérieur à l'autre.

Si donc, dans une file horizontale de (1), les angles sont enchaînés (sur leur ligne), il y a encore antitaxie visible entre eux (*Ibid.*); d'où l'antitaxie de leurs antitaxiques dans l'autre file horizontale (178**, II), c'est-à-dire l'enchaînement aussi de ces derniers (II) (sur l'autre ligne, à laquelle ils appartiennent). Et semblablement, s'il s'agissait de déchaînement dans une file horizontale.

Même raisonnement dans le second cas, à cela près que les notations (1) doivent être remplacées par

$$\begin{matrix} B' \} CF \{ G', & G' \} CF \{ B', \\ B'' \} CF \{ G'', & G'' \} CF \{ B'', \end{matrix}$$

et que, dans chaque file horizontale, l'enchaînement des angles consiste en leur identité, leur déchaînement en leur biadjacence.

Pour formuler commodément la nature de la relation, toujours commune ainsi, entre γ', φ' et γ'', φ'' simultanément, nous dirons qu'en leur abord $\mathfrak{a}$, les lignes considérées $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ ont un *frôlement* si cette relation est l'enchaînement, une *traversée* si elle est le déchaînement.

3° Au sous-alinéa (2°), nous avons désigné par $[CB']$, $[FG']$ les côtés de $\mathfrak{c}'$ qui prolongent l'abord $\mathfrak{a}$ immédiatement au delà de ses extrémités C, F. En les réduisant à des longueurs $[Cb']$, $[Fg']$ assez petites pour en faire des cils de l'autre ligne (III), on obtient

ce que nous aurons à considérer sous la dénomination d'*amorces* de l'abord $\mathfrak{A}$ sur la ligne $\mathfrak{L}'$. Définition semblable pour les amorces du même abord sur $\mathfrak{L}''$.

D'après cela, *les amorces d'un abord sur chaque ligne sont enchaînées pour un frôlement, déchaînées pour une traversée* (*Ibid.*), (2°).

4. Un contour triangulaire $\mathfrak{T}$ (2, I, 3°), de sommets $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, étant donné, nous aurons à considérer la région $\{\mathfrak{T}\}$ constituée par l'aire du triangle $\mathfrak{abc}$ (277*, I), abstraction faite des points de ses côtés, et la région $\{\mathfrak{T}\}_\infty$ laissée dans le plan de nos tracés par l'ablation de la région $\{\mathfrak{T}\}$ et des points du contour. Nous les nommerons respectivement l'*internat* et l'*externat* du contour (¹) (*cf.* 7, VI, *inf.*).

A ce propos, nous rappellerons qu'ainsi l'internat est la région commune aux trois demi-plans $\overline{\mathfrak{bca}}$, $\overline{\mathfrak{cab}}$, $\overline{\mathfrak{abc}}$ après ablation des segments $[\mathfrak{bc}]$, $[\mathfrak{ca}]$, $[\mathfrak{ab}]$, et nous observerons que chaque point de l'externat est

---

(¹) La distinction faite ainsi entre les points du périmètre d'un triangle, les autres points de son aire et ceux du surplus du plan (étrangers à ces deux ensembles) est nécessaire ici, comme on le verra dans un instant, et de semblables se présenteront plus loin. En l'élargissant ailleurs, on ajouterait beaucoup de précision et de clarté au langage, dans toutes les circonstances analogues, celles, veux-je dire, où interviennent des régions continues de lignes, de surfaces, de l'espace, avec les points, lignes et surfaces qui déterminent ces régions. Étant considérés, par exemple, deux points distincts sur une droite, il est parfois très gênant de manquer de mots pour distinguer d'eux ceux *non extrêmes* qui appartiennent, soit au segment limité par eux, soit aux deux prolongements de celui-ci. Pour sortir de cet embarras, il suffirait d'appliquer les mots *internat* et *externat* à la région des premiers points et à l'ensemble (discontinu) de celles des derniers. Et de même, pour une demi-droite, un demi-plan, une bande, un angle plan (saillant ou rentrant), etc., un demi-espace, un trièdre, etc. Mais ici je dépasserais les bornes, en allant au delà de l'indispensable.

caractérisé par la propriété d'être intérieur à l'un au moins des opposés aux demi-plans précités.

Nous dirons encore que deux points étrangers au contour sont placés, relativement à lui, *d'un même côté*, quand, simultanément, ils appartiennent, soit à son internat, soit à son externat, mais *de part et d'autre*, quand l'un d'eux est afférent à l'internat, l'autre à l'externat.

Cela posé, nous établirons un lemme qui nous sera indispensable :

Étant considéré un chemin $\mathfrak{C}$ (2, I, 1°) *dont les extrémités* O, U *sont étrangères au contour* $\mathfrak{C}$, *si le nombre* $\mathfrak{h}$ *des traversées des deux lignes* (3, IV) *est pair* (o *compris*), O, U *sont d'un même côté de contour; s'il est impair, ils sont de part et d'autre. Et réciproquement* (*cf.* 5, *inf.*).

I. 1° Dans le contour $\mathfrak{C}$, nous dirons *internes* les angles essentiels saillants α_1, β_1, c_1 en α, β, c, puis tout angle facultatif, partant neutre, o_1, contenant le sommet essentiel qui est étranger au côté (essentiel encore) dont son sommet o est un point intérieur; nous dirons *externes* les biadjacents α_2, β_2, c_2, ...o_2, ... des internes précités, les trois premiers rentrants, les autres tous neutres.

2° *De tous ces angles, deux quelconques sont enchaînés, quand, simultanément, ils sont internes ou externes, mais déchaînés, quand l'un est interne, l'autre externe* (*cf.* 7, VI, *inf.*).

Piquetés $\alpha\beta c$, $\alpha c\beta$, deux angles internes essentiels β_1, c_1 sont antitaxiques, parce que leurs seconds côtés $\overline{\beta c}$, $\overline{c\beta}$ ont des directions opposées sur une même droite βc, d'un seul côté de laquelle leurs autres côtés $\overline{\beta\alpha}$, $\overline{c\alpha}$ sont

placés (178**, IV). Piquetés $\alpha\beta c$, $\beta c\alpha$, ils sont donc homotaxiques (*Ibid.*, III), c'est-à-dire enchaînés (3, II); et de même, pour c_1, α_1, pour α_1, β_1.

Si [βc], pour fixer les idées, est le côté essentiel du contour, auquel est intérieur le sommet c d'un angle interne facultatif c_1, le piquetage βcc rend celui-ci homotaxique à sa partie $\beta c\alpha$, antitaxique par suite à $\alpha c\beta$. Or, dans le triangle $\alpha\beta c$ (comme dans le triangle $\alpha\beta c$ tout à l'heure), les angles $\alpha\beta c$, $\alpha c\beta$ sont antitaxiques. Donc βcc, antitaxique à $\alpha c\beta$ qui l'est à $\alpha\beta c$, est homotaxique à $\alpha\beta c$ s'écrivant $\alpha\beta c$ tout aussi bien. On en conclut l'enchaînement de ces angles notés c_1, β_1 au début, puis de tout angle interne facultatif à tout angle interne essentiel, finalement, celui de deux angles quelconques de la première sorte (*Ibid.*).

Un angle externe quelconque est déchaîné aux internes, parce qu'il est tel relativement à son biadjacent qui est interne, partant à tous les autres. Et il est ainsi enchaîné à tout externe (*Ibid.*),

D'après cela, *les chaînes d'angles de notre contour triangulaire sont composées, l'une des internes, l'autre des externes.*

[A peine est-il besoin de mentionner que nos angles internes essentiels sont ceux proprement dits (intérieurs) du triangle $\alpha\beta c$ (221*). Mais un angle externe essentiel n'est pas un angle extérieur; il est la somme géométrique des trois jumeaux de l'angle interne (142*), savoir son opposé au sommet et l'angle extérieur pris deux fois.]

3° *L'internat du contour $\mathfrak{T}$ est compris dans l'intérieur de tout angle interne, et son externat comprend celui de tout angle externe.*

Car un point de l'internat appartient, par définition, aux trois demi-plans $\overline{\beta c\alpha}$, $\overline{c\alpha\beta}$, $\overline{\alpha\beta c}$, en particulier aux deux d'entre eux, ou au seul, qui définissent l'intérieur

d'un angle interne essentiel (133*), ou facultatif (1°). Et un point intérieur à un angle externe appartient à un ou deux des opposés à ceux ou à celui des mêmes demi-plans qui définissent l'angle interne biadjacent.

II. *Quand un segment (non nul)* [AB] *n'a aucun point commun avec le contour, ses extrémités et autres points sont tous placés d'un même côté de lui* (*cf.* 5, IV, *inf.*).

1° *Si un point* O *appartient à l'internat du contour, un autre* U *à son externat, le segment* [OU] *traverse le contour en un point unique.*

Le point O étant intérieur aux angles internes α_1, β_1, c_1 (I, 3°), les demi-droites $\overline{\alpha}O$, $\overline{\beta}O$, $\overline{c}O$ le sont aussi (133*, II), coupent en conséquence, en des points intérieurs, α, β, γ, les segments $[\beta c]$, $[c\alpha]$, $[\alpha\beta]$ qui sous-tendent ces angles (*Ibid.*, IV). En même temps, leur concours O est tel pour les segments $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[c\gamma]$ qui les sous-tendent encore (*Ibid.*), ceci entraînant l'opposition du demi-plan $\overline{O\beta\alpha}$, par exemple, à $\overline{O\beta\alpha}$ identique à $\overline{O\beta c}$, semblablement celle de $\overline{Oc\beta}$ à $\overline{Oc\alpha}$, c'est-à-dire la juxtaposition extérieure des angles saillants $\alpha O\beta$, βOc par leur côté commun $\overline{O\beta}$, celle de βOc, $cO\alpha$ par $\overline{Oc}$, puis, pour ces trois angles, la propriété d'avoir l'angle replet de sommet O pour somme géométrique, puisque le second côté du dernier s'applique en $\overline{O\alpha}$ sur le premier côté du premier. Il en résulte que toute demi-droite issue de O, en particulier $\overline{OU}$, est placée à l'intérieur de l'un de ces trois angles, ou bien sur un de leurs côtés.

Si $\overline{OU}$ est intérieure à βOc par exemple, elle coupe en quelque point intérieur α' le segment $[\beta c]$ qui sous-tend cet angle; et tout point intérieur au segment

$[O\alpha']$ appartient à l'internat du contour, parce que, intérieur ainsi aux angles saillants $O\beta\alpha'$, $Oc\alpha'$, à β_1, c_1 par suite, dont les précédents sont de simples parties, il est tel pour chacun des trois demi-plans $\overline{\beta c}\alpha$, $\overline{c\alpha}\beta$, $\overline{\alpha\beta}c$ dont l'internat du contour est la région commune. Le point U, étranger à l'internat, l'est donc à ce segment, et, comme il est placé sur la demi-droite $\overline{O}U$, il appartient au prolongement du même segment $[O\alpha']$ au delà de α'. Ce point α', intérieur ainsi au segment $[OU]$, est donc un abord entre lui et le contour, le seul existant, parce que la demi-droite $\overline{O}U$, intérieure à l'angle βOc, extérieure par suite à $\alpha O\beta$, αOc, ne rencontre pas les côtés $[\alpha\beta]$, $[\alpha c]$ sous-tendant ceux-ci. C'est une traversée, parce que, α' étant intérieur à $[OU]$, il y a opposition entre les demi-droites $\overline{\alpha'}O$, $\overline{\alpha'}U$ qui contiennent ses amorces $[\alpha' O]$, $[\alpha' U]$ sur ce segment, puis entre les demi-plans $\overline{\beta c}O$, $\overline{\beta c}U$ contenant ces demi-droites, c'est-à-dire déchaînement entre ces derniers considérés comme angles facultatifs du contour en α' (3, II, 3° et IV, 2°).

Si $\overline{O}U$ se confond avec $\overline{O}\alpha$ par exemple, tout point intérieur au segment $[O\alpha]$ appartient à l'internat du contour, comme pour $[O\alpha']$ tout à l'heure; effectivement, ce segment sous-tend les angles saillants $O\beta\alpha$, $Oc\alpha$, parties seulement des angles β_1, c_1, ceci plaçant de même le point U sur son prolongement au delà de α. D'où l'existence d'un abord unique en α, puis son caractère de traversée, provenant du déchaînement des angles essentiels biadjacents α_1, α_2 auxquels les demi-droites $\overline{\alpha}O$, $\overline{\alpha}U$ sont respectivement intérieures.

2° Notre proposition est vraie; car, si les points A, B étaient placés de part et d'autre du contour, le segment $[AB]$ traverserait celui-ci (1°), et l'hypothèse serait

contredite. Il en serait de même, si quelque point M intérieur à ce segment n'était pas placé dans la même région que ses extrémités, parce que le contour traverserait une fois chacun des segments partiels [AM], [BM], deux fois par suite le segment total [AB].

3° Ajoutons, en passant, une remarque dont nous aurons besoin plus tard :

Quand les extrémités du segment [OU] *appartiennent à l'internat du contour, tous ses autres points s'y trouvent en même temps.* Conclusion bien facile des considérations du sous-alinéa 1°.

III. *La pointe m d'un cil* [$\mathfrak{m}m$] *du contour* $\mathfrak{T}$ (3, III) *appartient à son internat ou à son externat, selon que le cil est interne ou externe, c'est-à-dire que l'une ou l'autre qualification est applicable à l'angle* $\mathfrak{m}_x$ *du contour, auquel le cil est intérieur* (I, 1°).

1° Si l'angle $\mathfrak{m}_x$ est externe, son intérieur appartient à l'externat du contour (*Ibid.*, 3°), et il en est de même pour la demi-droite $\overline{\mathfrak{m}m}$ qui y est placée, partant pour le point m de celle-ci.

2° Quand $\mathfrak{m}_x$ est un angle interne essentiel α_1, la demi-droite $\overline{\mathfrak{a}m}$ qui lui est intérieure coupe en un point intérieur α le côté [$\mathfrak{b}\mathfrak{c}$] qui le sous-tend, et son point m est intérieur au segment [$\mathfrak{a}\alpha$]; car, s'il était en $\mathfrak{a}$ ou sur le prolongement de celui-ci au delà de α, le cil [$\mathfrak{m}m$] contiendrait le point α du contour, ce que sa définition ne permet pas. Or, l'intérieur de ce segment appartient à l'internat, parce qu'il est tel relativement à chacun des angles b_1, c_1 (*cf.* II, 1°); son point m fait donc partie de cet internat.

3° Supposons enfin que $\mathfrak{m}_x$ est interne facultatif,

cette hypothèse rendant intérieur à un côté [$\mathfrak{bc}$] le pied $\mathfrak{m}$ du cil.

Si la demi-droite $\overline{\mathfrak{m}m}$, qui est ainsi dans le demi-plan $\overline{\mathfrak{bca}}$, passe par le sommet $\mathfrak{a}$, on recommencera le raisonnement ci-dessus (2°), à cela près que le segment [$\mathfrak{ma}$] et son prolongement au delà de $\mathfrak{a}$ prendront les rôles que jouaient [$\mathfrak{a}\alpha$] et son prolongement au delà de α.

Sinon, elle est intérieure à l'un ou l'autre des angles saillants $\mathfrak{bma}$, $\mathfrak{cma}$, au premier par exemple; et, visiblement, cet angle est interne essentiel pour le contour triangulaire $\mathfrak{abma}$, en même temps que celui-ci a encore son seul point $\mathfrak{m}$ commun avec notre cil. On en conclut que le segment [$\mathfrak{m}m$] est un cil aussi pour le contour auxiliaire, puis (1°) que ce point m appartient à l'internat $\{\mathfrak{abma}\}$ de ce dernier, à celui de $\mathfrak{T}$ à plus forte raison. Effectivement, tout point de $\{\mathfrak{abma}\}$ est intérieur à chacun des angles saillants $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{bam}$, et $\mathfrak{a}_1$, par suite, dont le précédent n'est qu'une partie.

IV. 1° *La partie directe de notre énoncé est vraie, quand le chemin* $\mathfrak{C}$ *n'aborde pas le contour* ($\mathfrak{h} = 0$).

En prenant pour $\mathfrak{C}$ la notation explicite OABC.. ..STU, le sommet A est du même côté de $\mathfrak{T}$ que O parce que le segment [OA] ne peut donner aucun abord (II); puis B que A, que O par suite, pour cause semblable concernant le segment [AB]; puis C que B, A, O, et ainsi de suite jusqu'à U, en passant par ...S, T.

2° *Elle l'est encore dans le cas d'un abord unique existant entre nos lignes* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{C}$, *c'est-à-dire pour* $\mathfrak{h} = 0$ (frôlement) *ou* $= 1$ (traversée).

Soient M...P l'abord considéré, [M$\mathfrak{l}$], [P$\mathfrak{q}$] ses amorces sur $\mathfrak{C}$ (3, IV, 3°), puis OA...$\mathfrak{l}$ et UT...$\mathfrak{q}$ les parties du chemin comprises, la première entre O

et $\mathfrak{l}$, la seconde entre U et $\mathfrak{q}$, l'une et l'autre n'ayant plus d'abord avec le contour puisque M...P en est un unique.

S'il s'agit d'un frôlement, les cils [M$\mathfrak{l}$], [P$\mathfrak{q}$] issus de M, P sur le contour $\mathfrak{T}$ sont enchaînés (3, III, IV), partant tous deux internes ou tous deux externes, et ceci place leurs pointes $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{q}$ simultanément, soit dans $\{\mathfrak{T}\}$, soit dans $\{\mathfrak{T}\}_\infty$, c'est-à-dire d'un même côté de $\mathfrak{T}$ (*Ibid.*). Les points O, U sont donc en même relation avec le contour, puisque, les chemins partiels OA...$\mathfrak{l}$, UT...$\mathfrak{q}$ ne l'abordant plus, O est du même côté que $\mathfrak{l}$, et U que $\mathfrak{q}$ (1°).

Raisonnement tout semblable en cas de traversée, sauf que les cils [M$\mathfrak{l}$], [P$\mathfrak{q}$] sont alors déchaînés, par suite l'un interne, l'autre externe ; qu'ainsi leurs pointes $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{q}$ sont de part et d'autre de $\mathfrak{T}$, et ceci assure, comme tout à l'heure, les mêmes positions relatives à O, U.

3° *Elle est vraie dans tous les cas.*

Par des points étrangers au contour $\mathfrak{T}$, découpons le chemin $\mathfrak{C}$ en tronçons contenant chacun un seul abord, et faisons-le décrire, de O à U, par un point mobile $\mathfrak{m}$ (217*). Disons, en outre, que $\mathfrak{m}$ *franchit* un abord quand il parcourt en entier le tronçon dont celui-ci fait partie, puis, qu'en passant de l'un à l'autre quelconque des points de coupure, il *remménage* si ces points sont d'un même côté de $\mathfrak{T}$, qu'il *déménage* s'ils sont de part et d'autre.

Comme ainsi, chaque fois qu'il franchit un abord, $\mathfrak{m}$ remménage ou déménage selon que celui-ci est un frôlement ou une traversée (2°), son déplacement total de O à U, quel que soit le nombre des frôlements franchis, opérera finalement un remménagement quand le nombre des traversées franchies sera pair, un démé-

nagement quand il sera impair. En supposant donc O intérieur à $(\mathfrak{T})$, U le sera également si $\mathfrak{h}$ est pair, mais intérieur à $(\mathfrak{T})_{\varkappa}$ s'il est impair. Et semblablement, dans l'autre supposition.

4° Notre énoncé est de ceux, fort nombreux, dont la réciproque est une conséquence immédiate de la partie directe, pour la seule raison que les éventualités devenant tour à tour les hypothèses de celle-ci (la parité ou l'imparité du nombre $\mathfrak{h}$ dans le cas présent) sont contradictoires, et que chacune d'elles conduit à une conclusion incompatible avec les autres.

5. *Toute ligne* $\mathfrak{L}$, *soit interminée, soit fermée* (2, I, 2°, 3°), *découpe le plan de nos tracés en deux régions continues* (109*, II), *ou rives, qui ne présentent aucun point commun (sauf ceux de la ligne, dans certaines acceptions des mots).*

Avec tout chemin dont les extrémités lui sont étrangères, le nombre de ses traversées est pair, si ces extrémités appartiennent à une même rive, impair, s'il en est autrement.

Entre deux extrémités de cette sorte, et selon qu'elles se trouvent dans une même rive ou non, on peut tracer un chemin, sans abord avec la ligne dans le premier cas, en présentant un seul dans le second, celui-ci étant une traversée réductible à un point unique.

I. *Entre la ligne considérée et un contour triangulaire quelconque* $\mathfrak{T}$, *les traversées sont toujours en nombre pair* (*cf.* 8, *inf.*).

1° Si elle est interminée, nous y marquerons un point $\mathfrak{r}$ étranger au contour $\mathfrak{T}$, à partir duquel, sur elle et dans un sens constant (217*), nous ferons mouvoir

indéfiniment un point mobile $\mathfrak{m}$. En vertu de la restriction du n° 2, I, 2°, ce point atteindra sûrement une position $\mathfrak{o}$, en et au delà de laquelle il n'en prendra aucune appartenant au contour $\mathfrak{T}$ ou à son internat (4), ne cessant plus ainsi d'être placé dans son externat.

Une marche semblable, à partir de $\mathfrak{c}$ toujours, mais dans le sens opposé maintenant, fera découvrir pour $\mathfrak{m}$ une autre position $\mathfrak{n}$ jouissant des mêmes propriétés que $\mathfrak{o}$; et la partie $\mathfrak{ocn}$ de la ligne $\mathfrak{L}$, que donne la soudure, en $\mathfrak{c}$, des chemins $\mathfrak{co}$, $\mathfrak{cn}$ décrits successivement par $\mathfrak{m}$, contient la totalité de ses abords avec $\mathfrak{T}$, en même temps que les extrémités de ce chemin sont placées toutes deux dans l'externat de celui-ci, c'est-à-dire d'un même côté de lui. Or cette dernière circonstance impose la parité au nombre des traversées avec ce contour, tant de $\mathfrak{L}$ que de sa partie précitée (*Ibid.*).

2° Si la ligne $\mathfrak{L}$ est un second contour, son ouverture en quelque point étranger au premier $\mathfrak{T}$ (2, I, 3°) la change, sans modification dans les abords, en un chemin dont les extrémités, puisqu'elles se confondent, sont placées d'un même côté de $\mathfrak{T}$, et la conclusion précédente (1°) s'impose encore une fois (4).

II. Relativement à la ligne considérée, nous dirons provisoirement que deux points ne lui appartenant pas sont *assortis* ou *désassortis*, suivant que le nombre des traversées existant entre elle et le segment rectiligne qu'ils limitent est pair ou impair (la restriction du n° 2, I, 2°, rend impossible l'illimitation de ce nombre).

Trois points m, m_1, m_2 étrangers à $\mathfrak{L}$ étant marqués arbitrairement, les relations de ce genre entre l'un d'eux quelconque m et chacun des autres

m_1, m_2 sont homonymes ou hétéronymes, selon qu'il y a assortiment entre ces derniers, ou désassortiment.

Soient θ, θ_1, θ_2 les nombres des traversées données par les segments $[m_1 m_2]$, $[m_1 m]$, $[m_2 m]$ respectivement, et Π quelque nombre pair. On a

$$\theta - \theta_1 - \theta_2 = \Pi, \tag{2}$$

parce que cette somme est le nombre total des traversées de notre ligne et du contour triangulaire $m m_1 m_2 m$ (I), puis, par suite,

$$\theta_1 - \theta_2 = \Pi - \theta.$$

Si m_1, m_2 sont mutuellement assortis, θ est pair, $\Pi - \theta$ également, et cette égalité montre que θ_1, θ_2 sont tous deux pairs ou tous deux impairs, c'est-à-dire qu'à chacun de ces deux points, simultanément, m est assorti dans le premier cas, désassorti dans le second.

Si les mêmes points sont au contraire désassortis, θ est impair, $\Pi - \theta$ en même temps, et, en vertu de la même égalité, l'un des nombres θ_1, θ_2 est pair, l'autre impair, ceci marquant que m est assorti à l'un de ces points mais désassorti à l'autre.

Ce raisonnement exige que les points m, m_1, m_2 ne soient pas en ligne droite; autrement, le contour $m m_1 m_2 m$ serait enchevêtré et ne laisserait plus prise ainsi au théorème du n° 4. Mais alors, l'un des trois segments considérés serait la somme (géométrique) des deux autres, l'un des nombres θ, θ_1, θ_2 serait égal à celle (arithmétique) des deux autres, et par là l'égalité (2) subsisterait.

III. *Tous les points étrangers à notre ligne se groupent en deux ensembles ne présentant aucun point commun, tels, en outre, que deux points d'un même ensemble sont toujours assortis, que deux*

points appartenant à l'un et à l'autre, respectivement, sont toujours désassortis.

1° *Un tel point* P *ayant été pris arbitrairement, les deux ensembles formés, l'un* $\{P\}_a$ *par lui et tous ceux qui lui sont assortis, l'autre* $\{P\}_d$ *par ses désassortis, embrassent dans leur réunion la totalité des points étrangers à la ligne, sans qu'un même de ceux-ci appartienne jamais à tous deux.* C'est évident.

2° *Dans un même ensemble, deux points sont toujours assortis.* Car, s'ils ne l'étaient pas, leurs relations avec P seraient hétéronymes, au lieu de consister tantôt en deux assortiments, tantôt en deux désassortiments (I).

Mais, appartenant à l'un et à l'autre, respectivement, ces points sont toujours désassortis. Car, autrement, leurs relations avec P seraient homonymes au lieu d'être un assortiment et un désassortiment.

3° D'après cela, il y a identité entre l'assortiment, le désassortiment de deux points, et leur situation, soit dans un même ensemble, soit dans l'un et l'autre, respectivement.

Enfin, rien n'est plus facile, en théorie, que la détermination des points appartenant à chaque ensemble sur toute sécante issue du point P, comme ensuite de tout autre en relation connue avec celui-ci, opération dont la construction effective des deux ensembles n'est que la réitération indéfinie.

IV. *Quand aucun des points d'un chemin n'est situé sur la ligne, tous appartiennent à un même ensemble.*

Pour un simple segment, il suffit d'observer que le nombre de ses traversées comprises entre deux quel-

conques de ses points se réduit à zéro, nombre pair, et qu'ainsi ces points sont toujours assortis (III).

Pour tout autre chemin, on raisonnera comme au n° 4, IV, 1°.

V. *Quand deux cils de notre ligne sont enchaînés* (3, III), *leurs pointes peuvent être réunies par un chemin sans abord avec elle, appartiennent par suite à un même ensemble* (IV).

1° Considérons en premier lieu deux tels cils de même pied $\mathfrak{m}$, notés en conséquence $[\mathfrak{m}m']$, $[\mathfrak{m}m'']$, et supposons saillant, en outre, l'angle partiel $m'\mathfrak{m}m''$ découpé par les demi-droites $\overline{\mathfrak{m}}m'$, $\overline{\mathfrak{m}}m''$ dans l'angle de la ligne en $\mathfrak{m}$, auquel toutes deux sont intérieures.

Comme, à l'exception de $\mathfrak{m}$, les côtés $[\mathfrak{m}m']$, $[\mathfrak{m}m'']$ du triangle $m'\mathfrak{m}m''$ n'ont, par hypothèse, aucun point intérieur ou extrême en commun avec la ligne, on aperçoit sans peine qu'en vertu de la restriction du n° 2, I, 2°, il est possible d'assigner, sur $[\mathfrak{m}m'']$ par exemple, un point μ'' assez voisin de $\mathfrak{m}$ pour que le segment $[m'\mu'']$ ne rencontre pas la ligne.

D'ailleurs, le segment $[\mu''m'']$ ne la rencontre pas non plus, parce que, des deux parties en lesquelles $[\mathfrak{m}m'']$ est découpé par μ'', il est celle qui ne contient pas $\mathfrak{m}$. Le chemin $m'\mu''m''$ réunit donc m' à m'' dans les conditions voulues.

2° Si l'angle partiel $m'\mathfrak{m}m''$ (1°) est neutre ou rentrant, la demi-droite $\overline{\mathfrak{m}}m^{(0)}$ d'un cil intérieur auxiliaire de même pied $[\mathfrak{m}m^{(0)}]$ pourra toujours le décomposer en deux angles saillants. On obtiendra donc un chemin de la nature voulue, en soudant ceux qui joignent ainsi m' à $m^{(0)}$, puis $m^{(0)}$ à $m^{(1)}$ (1°).

3° Considérons ensuite deux cils enchaînés $[\mathfrak{m}m]$, $[\mathfrak{n}n]$, dont les pieds $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ sont distincts et chacun à

l'intérieur ou à l'extrémité d'un même côté de la ligne; en outre, supposons tous deux saillants les angles $\mathfrak{nm}m$, $\mathfrak{mn}n$ qu'à partir de leurs côtés $\overline{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}$, $\overline{\mathfrak{n}}\mathfrak{m}$, les demi-droites $\overline{\mathfrak{m}}m$, $\overline{\mathfrak{n}}n$ détachent des angles $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{n}_x$ de la ligne, auxquels elles sont intérieures.

L'enchaînement supposé des angles $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{n}_x$ impose aux demi-droites $\mathfrak{m}m$, $\overline{\mathfrak{n}}n$ des positions intérieures à un même demi-plan d'arête $\mathfrak{mn}$. En nommant effectivement $\overline{\mathfrak{m}}\mathfrak{l}$, $\overline{\mathfrak{n}}\mathfrak{p}$ les côtés des mêmes angles, autres que $\overline{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}$, $\overline{\mathfrak{n}}\mathfrak{m}$, il y a homotaxie entre $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{n}_x$ piquetés $\mathfrak{lmn}$, $\mathfrak{mnp}$ (3, I, 1°), puis, par suite, entre leurs parties précitées, sous les notations $m\mathfrak{mn}$, $\mathfrak{mn}n$ (*Ibid.*, 2°). D'où l'antitaxie des mêmes parties piquetées maintenant $\mathfrak{nm}m$, $\mathfrak{mn}n$ (178**), puis, la situation de leurs seconds côtés $\overline{\mathfrak{m}}m$, $\overline{\mathfrak{n}}n$, dans un même demi-plan d'arête $\mathfrak{mn}$, parce qu'ils sont saillants et que leurs côtés-origines $\overline{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}$, $\overline{\mathfrak{n}}\mathfrak{m}$ sont appliqués sur une même droite $\mathfrak{mn}$ dans des directions opposées (*Ibid.*).

Il en résulte qu'une demi-droite allant de $\mathfrak{n}$ à un point indéterminé μ de $[\mathfrak{m}m]$ appartient toujours à ce demi-plan, puis, qu'on peut prendre μ assez voisin de $\mathfrak{m}$ pour qu'elle soit intérieure à l'angle précité $\mathfrak{mn}n$, puis encore, en vertu de la restriction déjà invoquée (2, I, 2°), que ce rapprochement peut être poussé assez loin pour placer μ en une position m' soustrayant le côté $[\mathfrak{n}m']$ du triangle $m'\mathfrak{mn}$ à tout abord avec la ligne ($\mathfrak{n}$ étant comme toujours excepté), c'est-à-dire faisant de ce côté un cil auxiliaire de pied $\mathfrak{n}$. Et ce nouveau cil $[\mathfrak{n}m']$ est enchaîné à $[\mathfrak{n}n]$, car, étant intérieure à l'angle $\overline{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}n$, sa demi-droite $\overline{\mathfrak{n}}m'$ l'est à plus forte raison, comme $\overline{\mathfrak{n}}m$, à l'angle $\mathfrak{n}_x$ dont le précédent n'est qu'une partie.

Pour joindre m à n dans les conditions voulues, il

suffit donc d'adjoindre au segment $[mm']$ qui les remplit visiblement, comme $[\mu''m'']$ tout à l'heure (1°), le chemin réunissant m' à n dans les mêmes conditions (*Ibid.*).

4° Si les angles $\mathfrak{n}\mathfrak{m}m$, $\mathfrak{m}\mathfrak{n}n$ précités sont rentrants tous deux, des cils auxiliaires $[\mathfrak{m}m']$, $[\mathfrak{n}n']$, dont les demi-droites divisent chacun d'eux en deux angles saillants, seront visiblement enchaînés à $[\mathfrak{m}m]$, $[\mathfrak{n}n]$, respectivement, l'un à l'autre par suite, et il ne reste qu'à joindre, dans les conditions voulues, m à m' (1°), puis m' à n' (3°), puis n' à n (1°).

5° Si enfin les cils en question $[\mathfrak{m}m]$, $[\mathfrak{n}n]$ sont quelconques, on peut visiblement leur en adjoindre d'autres en nombre limité, $[\mathfrak{p}'p']$, $[\mathfrak{p}''p'']$, ..., $[\mathfrak{p}^{(k)}p^{(k)}]$, qui soient enchaînés à tous deux, mutuellement en conséquence, tels en outre que, dans la suite $[\mathfrak{m}m]$, $[\mathfrak{p}'p']$, ..., $[\mathfrak{p}^{(k)}p^{(k)}]$, $[\mathfrak{n}n]$, deux consécutifs aient leurs pieds toujours placés sur un même côté de la ligne.

Pour obtenir le chemin dont l'existence est affirmée par l'énoncé, il suffit donc de souder ensemble ceux de même nature qui joignent m à p', puis p' à p'', puis finalement $p^{(k)}$ à n (4°).

VI. *Quand il s'agit de deux cils déchaînés, leurs pointes peuvent être réunies par un chemin sans autre abord avec la ligne qu'une traversée consistant en un point, et elles appartiennent aux deux ensembles respectivement.*

1° De ces deux cils $[\mathfrak{m}m]$, $[\mathfrak{n}n]$, si l'un $[\mathfrak{n}n]$ est intérieur à un angle de la ligne, saillant ou neutre, nommons $[\mathfrak{n}n']$ un cil auxiliaire dont la demi-droite $\overline{\mathfrak{n}n'}$ est opposée à $\overline{\mathfrak{n}n}$, cil visiblement déchaîné à $[\mathfrak{n}n]$, enchaîné par suite à $[\mathfrak{m}m]$. Le segment $[n'n]$ n'abordant la ligne que pour la traverser en $\mathfrak{n}$, sa soudure avec un

chemin joignant m à n' sans aborder celle-ci (V) fournit immédiatement celui que notre énoncé mentionne.

Les cils $[\mathfrak{m}m]$, $[\mathfrak{n}n']$ étant enchaînés, l'ensemble qui contient n' contient m aussi (*Ibid.*), mais il ne contient pas n, parce que le segment $[nn']$ traverse la ligne une fois seulement, savoir en $\mathfrak{n}$ (III).

2° Si, au contraire, $[\mathfrak{n}n]$ est intérieur à un angle rentrant, nous tracerons, du même pied $\mathfrak{n}$, un premier cil auxiliaire $[\mathfrak{n}n']$ intérieur à l'opposé au sommet du biadjacent de cet angle, et un deuxième $[\mathfrak{n}n'']$ de demi-droite opposée à $\overline{\mathfrak{n}}n'$. Visiblement, ces deux cils sont déchaînés mutuellement, mais enchaînés à $[\mathfrak{n}n]$, $[\mathfrak{m}m]$ respectivement. On pourra donc (1°) construire, de m à n', en passant par n'', un chemin $m \ldots n''n'$ sans autre abord qu'une traversée en $\mathfrak{n}$, puis (V) joindre n' à n par un autre n'offrant aucun abord. La réunion $m \ldots n''n'n$ de ces deux chemins donnera celui qui est visé par l'énoncé; m, n appartiennent à des ensembles différents, parce qu'il est ainsi pour n', n'', comme ci-dessus (1°) pour n', n, tandis que n, n' sont dans un même ensemble, m, n'' dans l'autre.

VII. Considérons maintenant deux points quelconques m, n d'un même ensemble $\{\mathfrak{L}\}_x$.

Si le segment $[mn]$ n'aborde pas la ligne, tous ses points appartiennent à cet ensemble, qui comprend ses extrémités (IV).

Si, au contraire, il existe des abords, soient, parmi tous leurs points, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ les plus rapprochés de m, n respectivement. Les segments $[\mathfrak{m}m]$, $[\mathfrak{n}n]$ sont, pour la ligne, des cils de pieds $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, puisqu'ils n'ont que ces points communs avec elle; et ces cils sont enchaînés, parce que, s'ils étaient déchaînés, leurs pointes m, n

n'appartiendraient pas toutes deux à l'ensemble considéré (VI), contrairement à ce qui a été supposé.

Entre ces pointes prises pour extrémités, l'observation de l'alinéa V assure ainsi la possibilité de tracer un chemin $\mathfrak{S}$ sans abord avec la ligne, dont tous les points par suite (IV) appartiennent en totalité (extrémités comprises) à un même ensemble, savoir $\mathfrak{L}_x$, parce que celui-ci comprend par hypothèse chacune des extrémités m, n du chemin. Cet ensemble constitue donc une figure continue, puisque tout chemin tel que $[mn]$ ou $\mathfrak{S}$ peut être décomposé en côtés facultatifs dont la petitesse est arbitraire (2, III), (109*, II).

C'est pourquoi nous donnerons le nom de *rives* de la ligne $\mathfrak{L}$ aux deux ensembles de points que nous venons d'étudier.

VIII. Ainsi qu'au n° 4, IV, 3°, où un contour triangulaire jouait le rôle de notre ligne $\mathfrak{L}$ ici, représentons par OA...$\mathfrak{l}$M...P$\mathfrak{q}$...TU un chemin offrant avec elle un seul abord M...P dont M$\mathfrak{l}$, P$\mathfrak{q}$ sont les amorces sur lui, chemin décomposable ainsi en trois parties, OA...$\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}$M...P$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$TU, dont la première et la troisième n'abordent plus la ligne.

Pour celle-ci, les amorces précitées étant des cils, enchaînés s'il y a frôlement, déchaînés s'il y a traversée (3, IV, 3°), leurs pointes $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{q}$ sont intérieures à une même rive (VII) dans le premier cas (V), intérieures à l'une et à l'autre respectivement dans le second (VI); et, de la nature des chemins partiels $\mathfrak{l}$...AO, $\mathfrak{q}$...TU qui a été mentionnée, il résulte que ces situations relatives des points $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{q}$ en imposent de mêmes noms à leurs autres points extrêmes O, U (IV).

Il suffit maintenant de poursuivre le raisonnement comme au n° 4, IV, 3°, pour achever la démonstration

de la partie de notre théorème que formule le deuxième alinéa de son énoncé.

IX. Nommons enfin m, n deux points quelconques étrangers à la ligne.

1° S'ils appartiennent à une même rive, l'opération expliquée tout à l'heure (VII) procurera leur jonction par un chemin sans abord et tracé tout entier dans cette rive.

2° Sinon, et cela arbitrairement, on tracera, d'un même point $\mathfrak{t}$ de la ligne, deux cils déchaînés $[\mathfrak{t}\mu]$, $[\mathfrak{t}\nu]$ dont les pointes μ, ν appartiennent par suite à l'une et à l'autre rive respectivement (VI); et, d'après cela, on peut supposer m, μ dans une même rive, n, ν dans l'autre. De m à μ, de n à ν, on pourra donc tracer des chemins $m \ldots \mu$, $n \ldots \nu$ sans abord avec la ligne (1°). D'autre part, la réunion des deux cils donne un troisième chemin à deux côtés, $\mu\mathfrak{t}\nu$ ne faisant que le traverser au point $\mathfrak{t}$. En soudant ces trois chemins, on obtiendra donc, en $m \ldots \mu\mathfrak{t}\nu \ldots n$, celui dont l'existence est affirmée par les derniers mots de notre énoncé.

5 *bis*. L'existence des deux rives, mutuellement *opposées* peut-on dire, que sépare ainsi toute ligne $\mathfrak{L}$ interminée ou fermée, est l'extension à un cas très large de la notion des deux régions continues (demi-plans opposés), en lesquelles le plan est découpé par une droite, la plus simple qui soit concevable parmi les lignes de cette sorte. Un bien facile examen de l'enchaînement des idées fera ressortir, en passant, le caractère primordial appartenant à cette notion dans la Géométrie topographique du plan (cas d'intersection des droites, définition des bandes, angles, aires polygonales, etc.), à l'égal de celles de demi-droites, demi-

espaces, dans les spéculations de ce genre, restreintes au domaine d'une droite, ou bien étendues à la totalité de l'espace.

(*A suivre.*)

[D1a]

THÉORÈMES SUR LES LIMITES;

PAR M. L. DESAINT.

Voici quelques théorèmes dont les derniers n'ont pas encore été donnés, il me semble, et qui sont faciles à appliquer :

Si, à partir de $z = u_0$, *la fonction*

$$f(z)$$

est croissante,

$$\frac{f(z)}{z}$$

restant inférieur à 1 *quand* z *augmente indéfiniment, la suite de nombres positifs*

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n \qquad (u_1 > u_0),$$

où deux termes consécutifs satisfont à

$$u_n = f(u_{n-1}),$$

tend vers une limite.

Les quantités

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots$$

croissent.

En effet, admettons

$$u_n > u_{n-1}$$

pour tous les indices

$$n = 1,$$
$$n = 2$$

jusqu'à n.

Il est facile de démontrer que

$$u_{n+1} > u_n.$$

A cause de la fonction $f(z)$ et de sa croissance,

$$f(u_n) > f(u_{n-1})$$

et

$$u_{n+1} > u_n.$$

Ensuite constatons que les u ne peuvent augmenter indéfiniment. Sans quoi,

$$\frac{f(u_n)}{u_n} \qquad (n > N)$$

devenant inférieur à 1,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

qui lui est égal, devient inférieur à 1, ce qui est contraire à la première partie de la démonstration.

La limite λ des u est d'ailleurs racine de

$$x = f(x)$$

si la fonction $f(x)$ non seulement est croissante, mais est aussi continue.

On peut donner un énoncé plus large :

Si

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{n-1}, \quad \ldots \qquad (u_1 > u_0)$$

forment une suite de quantités admettant une loi de récurrence

$$\varphi(u_{n-1}) = f(u_n),$$

$f(z)$ *et* φ *étant des fonctions croissantes à partir de*

$z = u_0$, *les ordres d'infinitude de* $\varphi(z)$ *et* $f(z)$ *étant différents, celui de* $\varphi(z)$ *étant plus grand que celui de* $f(z)$ *si* z *est l'infiniment grand principal, la suite des* u_n *tend vers une limite.*

Je vais faire voir que, en supposant les termes u croissant jusqu'au terme u_{n-1}, on a encore

$$u_n > u_{n-1}.$$

Essayons l'hypothèse contradictoire

$$u_n < u_{n-1}.$$

Dans ces conditions

$$\varphi(u_{n-1}) = f(u_n) < [f(u_{n-1}) = \varphi(u_{n-2})],$$

d'après notre hypothèse de la croissance de la fonction $f(z)$.

Pareillement

$$\varphi(u_{n-1}) > \varphi(u_{n-2}),$$

à cause de la propriété de $\varphi(z)$.

Les deux inégalités qui précèdent se contredisent.

Les quantités u_n vont en croissant.

Il reste à montrer que les u restent finis.

Si u_n augmentait indéfiniment, alors

$$f(u_n) > f(u_{n-1}) = \lambda u_{n-1}^{\alpha}(1 + \varepsilon),$$

α étant l'ordre d'infinitude de $f(z)$, pour z infini.

Pareillement

$$\varphi(u_{n-1}) = \lambda' u_{n-1}^{\beta}(1 + \varepsilon_1).$$

Or

$$f(u_n) = \varphi(u_{n-1}),$$

d'où

$$\lambda' u_{n-1}^{\beta}(1 + \varepsilon_1) = \lambda u_{n-1}^{\alpha}(1 + \varepsilon) + \eta \qquad (\eta > 0).$$

Or, l'ordre d'infinitude α est plus grand que β; cette égalité deviendrait impossible pour u_{n-1} infini.

Il n'est pas difficile d'aller encore plus loin en remarquant au préalable que la limite précédente est solution de

$$f(x) = \varphi(x).$$

Étant donné un ensemble

$$u_0, \quad u, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_n,$$

déterminé par la loi de récurrence

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}, \ldots, u_{n-k}),$$

$f(x, y, z, \ldots)$ étant une fonction croissante des variables $x, y, \ldots$, quand celles-ci croissent simultanément, les inégalités

$$0 < u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_k$$

ayant lieu, et la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ donnant lieu à l'inégalité

$$\frac{f(z, z, z, \ldots, z)}{z} < 1,$$

pour z infini, les quantités

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n$$

tendent vers une limite.

Supposons que les quantités $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ aillent en croissant.

Les quantités qui suivent donneront lieu à

$$u_n > u_{n-1}.$$

Remplaçons u_n par

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-k}).$$

Pareillement

$$u_{n-1} = f(u_{n-2}, u_{n-3}, \ldots, u_{n-k-1}).$$

Comme

$$u_{n-1} > u_{n-2},$$
$$u_{n-2} > u_{n-3},$$
$$\dots\dots\dots\dots;$$
$$u_{n-k} > u_{n-k-1},$$

on en déduit

$$u_n > u_{n-1},$$

à cause de la croissance de la fonction $f(x, y, z, \dots)$.

Il nous reste à montrer que les quantités u_n restent finies.

Envisageons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-k+1})}{u_n} < \frac{f(u_n, u_n, u_n)}{u_n},$$

à cause de la croissance de $f(x, y, \dots)$.

Comme pour z infini

$$\frac{f(z, z, \dots)}{z} < 1,$$

il n'est pas admissible que u_{n+1} augmente au delà de toute limite, car nous savons que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1,$$

à cause de la croissance des u.

Nous allons envisager le cas où deux suites

$$u_0, \quad u_1, \quad \dots, \quad u_n,$$
$$v_0, \quad v_1, \quad \dots, \quad v_k$$

se présenteraient assujetties aux conditions suivantes :

$$u_n = f_1(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-k}, v_{n-1}, \dots, v_{n-k'}),$$
$$v_n = f_2(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, v_{n-1}, v_{n-k'}),$$

en supposant les fonctions $f_1(x, y, \dots, x', y', \dots)$

et f_2 croissantes, et de plus

$$0 < u_0 < \ldots < u_h,$$
$$0 < v_0 < \ldots < v_h$$

et

$$\frac{f_1(z, z, \ldots, z', z')}{z} < 1,$$

$$\frac{f_2(z, z, \ldots, z', z')}{z'} < 1,$$

pour z et z' infiniment grands positifs. Dans ce cas

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_n,$$
$$v_0, \quad v_1, \quad \ldots, \quad v_n$$

tendent vers une limite.

Montrons que les u et les v croissent.

Supposons que ce soit vrai depuis u_0 jusqu'à u_{n-1}, depuis v_0 jusqu'à v_{n-1}.

Je vais montrer que

$$u_n > u_{n-1},$$
$$v_n > v_{n-1}.$$

Envisageons

$$u_n = f(u_{n-1}, \ldots, v_{n-1}),$$
$$u_{n-1} = f(u_{n-2}, \ldots, v_{n-2}),$$

à cause de la croissance de la fonction f,

$$f(u_{n-1}, \ldots, v_{n-1}, \ldots) > f(u_{n-2}, \ldots, v_{n-2}, \ldots),$$

car

$$u_{n-2} < u_{n-1},$$
$$v_{n-2} < v_{n-1}, \quad \ldots.$$

Ces quantités restent finies.

Pour le voir, envisageons

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{f_1(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots)}{u_{n-1}}$$
$$< \frac{f_1(u_{n-1}, u_{n-1}, \ldots, v_{n-1}, v_{n-1}, \ldots)}{u_{n-1}},$$

à cause de la croissance des v et des u avec l'indice et de la croissance de la fonction $f_1(x, y, \ldots, x', \ldots)$.

Comme

$$\frac{f_1(z, \ldots, z', z', \ldots)}{z}$$

reste inférieur à 1 quand z, z' sont infiniment grands positifs, il est impossible que les v_{n-1} et u_{n-1} augmentent indéfiniment; l'inégalité précédente

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{f_1(u_{n-1}, u_{n-1}, \ldots, v_{n-1}, v_{n-1}, \ldots)}{u_{n-1}},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{f_1(z, z, \ldots, z', z', \ldots)}{z},$$

z', z augmentant au delà de toute limite, demanderait que u_n devînt plus petit que u_{n-1}; la croissance de u_n avec l'indice empêche une semblable conclusion.

Un semblable raisonnement ferait voir que les v restant finis de même tendent vers une limite.

Nous sommes, pour justifier l'existence de la proposition précédente, tenus de montrer que les conditions de l'énoncé peuvent être réalisées.

Ainsi

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} - \frac{1}{v_{n-1}+1} + 2},$$

$$v_n = \sqrt{v_{n-1} - \frac{1}{u_{n-1}+1} + 2},$$

en faisant

$$v_0 = u_0 = 0,$$

entraînent

$$u_1 = v_1 = 1 > u_0, v_0.$$

Les fonctions

$$\sqrt{z - \frac{1}{z'+1} + 2} \quad \text{et} \quad \sqrt{z' - \frac{1}{z+1} + 2}$$

croissent avec z et z'.

Ensuite

$$\frac{\sqrt{z - \frac{1}{z'+1} + 2}}{z} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{z' - \frac{1}{z+1} + 2}}{z'}$$

tendent vers zéro, quand z' et z augmentent indéfiniment, par suite restent inférieurs à 1 dès que z' et z augmentent infiniment.

Pour appliquer les résultats précédents, il sera nécessaire souvent de préparer l'étude par la recherche des relations pouvant lier des u d'indices différents.

Prenons

$$u_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 \ldots}}}$$

Il est facile de constater que

$$u_n = \sqrt{3 + u_{n-1}}.$$

Ici

$$u_0 = \sqrt{3}.$$

$$u_1 = \sqrt{3 + \sqrt{3}} > u_0;$$

de plus,

$$f(z) = \sqrt{3 + z}$$

est croissante avec z et

$$\frac{\sqrt{3 + z}}{z} < 1,$$

à partir de z suffisamment grand, car

$$\frac{\sqrt{3 + z}}{z} \to 0,$$

pour z infini.

Par suite, les u tendent vers une limite.

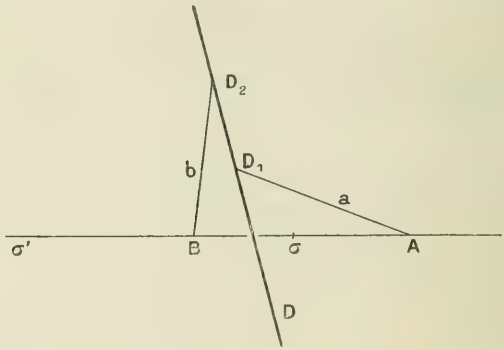
[L²21c]

NOTE SUR LES QUADRIQUES CIRCONSCRITES A DEUX SPHÈRES;

PAR M. M.-F. EGAN.

M. Bricard a démontré (¹) que les plans tangents menés par une droite D, qui varie en touchant deux

Fig. 1.



sphères, à une quadrique Q circonscrite aux deux sphères, contiennent un angle θ qui est indépendant de la position de D, et que les plans bissecteurs de cet angle sont les plans qui passent par les centres de similitude des sphères.

Cet angle θ caractérise la quadrique Q, que l'on peut désigner, par conséquent, par $Q(\theta)$.

Ces quadriques jouissent aussi de la propriété suivante :

(¹) *Nouv. Ann.*, mars 1909.

L'angle des deux plans, issus d'une génératrice quelconque de $Q(\theta)$, *qui passent par les centres des sphères, est égal à* θ.

I. Pour le montrer, refaisons la démonstration du théorème de M. Bricard d'un autre point de vue. Soient A et B les centres des sphères, a et b leurs rayons, et soient

$$(1) \qquad l^2 = a^2 J, \qquad m^2 = b^2 J \qquad (J = u^2 + v^2 - w^2)$$

les équations des sphères en coordonnées tangentielles.

Toute quadrique de révolution autour de AB a deux foyers (réels ou imaginaires) sur AB, dont les équations seront

$$el + fm = 0, \qquad e'l - f'm = 0,$$

e, f, e', f' étant des constantes. L'équation de la quadrique sera donc

$$(el + fm)(e'l + f'm) = kJ.$$

Si la quadrique est circonscrite aux sphères a et b, il est facile de voir que son équation s'écrira

$$(2) \qquad S(\theta) = \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - 2\frac{lm}{ab}\cos\theta - J\sin^2\theta = 0.$$

En effet, cette équation peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes

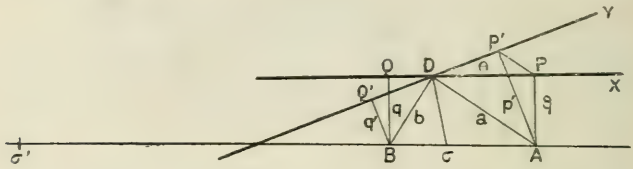
$$\left(\frac{l}{a} - \frac{m}{b}\cos\theta\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{m^2}{b^2} - J\right) = 0,$$

$$\left(\frac{l}{a}\cos\theta - \frac{m}{b}\right)^2 - \sin^2\theta\left(\frac{l^2}{a^2} - J\right) = 0.$$

L'angle θ, nous allons le voir, est précisément l'angle dont il est question dans l'énoncé.

Soient p et q les longueurs des normales issues de A et B à un plan quelconque. L'équation (2) nous

Fig. 2.



apprend que, si ce plan touche la quadrique S(θ), on a

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} - \frac{2pq}{ab}\cos\theta = \sin^2\theta. \tag{3}$$

Considérons une droite D qui touche les deux sphères. Soient D_1 et D_2 les points de contact de D, et σ, σ' les centres de similitude (*fig.* 1). Projetons la figure AD_1D_2B sur un plan perpendiculaire à D (*fig.* 2). D se réduit à un point, tout plan qui passe par D est représenté par une droite, et l'angle de deux de ces droites est égal à celui des plans correspondants. Les longueurs AD_1, BD_2 ne sont pas changées; elles sont a et b, et les rapports $A\sigma : \sigma B$, $A\sigma' : \sigma' B$ restent égaux à $\pm a : b$. Donc $D\sigma$ et $D\sigma'$ sont les bissectrices dans la figure 2 ou les plans bissecteurs dans la figure 1 de l'angle ADB.

Menons deux plans DX et DY, faisant l'un et l'autre un angle $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ avec $D\sigma$. Si (p, q), (p', q') appartiennent à DX et DY, on a facilement

$$\frac{p}{a} = \frac{q'}{b}, \qquad \frac{p'}{a} = \frac{q}{b}.$$

On a aussi $\left(\text{puisque } \widehat{PDP'} = \widehat{PAP'} = \theta\right)$

$$p^2 - p'^2 - 2pp'\cos\theta = PP'^2 = a^2\sin^2\theta.$$

Donc

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{p'^2}{a^2} - 2\frac{p}{a}\frac{p'}{a}\cos\theta = \sin^2\theta,$$

d'où, en substituant $\frac{q}{b}$ à $\frac{p'}{a}$, on tire

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{2pq}{ab}\cos\theta = \sin^2\theta.$$

On a de même

$$\frac{p'^2}{a^2} + \frac{q'^2}{b^2} - \frac{2p'q'}{ab}\cos\theta = \sin^2\theta.$$

Donc, les plans DX et DY sont bien les plans tangents menés par D à la quadrique $S(\theta)$, et leur angle est θ.

II. Supposons maintenant que D soit une génératrice de $S(\alpha)$ ($\theta \neq \alpha$). On a toujours pour le plan DX

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{2pq}{ab}\cos\theta = \sin^2\theta.$$

Or DX, comme tout plan qui passe par D, touche la quadrique $S(\alpha)$; on a donc

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{2pq}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha,$$

d'où, en soustrayant et divisant par $\cos\theta - \cos\alpha$, on tire

$$\cos\alpha + \cos\theta = \frac{2pq}{ab} = 2\frac{AP}{AD}\frac{BQ}{BD} = 2\sin ADP \sin BDQ.$$

Or,

$$ADP + BDQ = \pi - ADB, \qquad BDQ \quad ADP = \theta;$$

donc

$$\cos\alpha + \cos\theta = \cos\theta + \cos ADB,$$

$$\therefore \cos ADB = \cos\alpha.$$

ADB est l'angle entre les plans DA, DB; cet angle est donc égal à α pour toutes les génératrices D de la quadrique $S(\alpha)$. C. Q. F. D.

Notons que l'angle des plans menés par D et passant par les centres A et B est égal à celui des plans tangents des sphères aux points de contact avec D.

III. Si l'on fait une transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère quelconque, on déduit le théorème suivant :

Soient u et v deux coniques ayant un foyer commun F, *et soient* U *et* V *les quadriques qu'engendrent u et v en tournant chacune autour de son axe. Une quadrique donnée* Q, *circonscrite à* U *et* V, *coupera une droite* D, *qui varie en touchant* U *et* V, *en deux points qui sous-tendront un angle constant θ en* F. *Les points de contact avec* U *et* V *d'une génératrice quelconque de* Q *sous-tendront en* F *un angle égal à θ. Les bissectrices de θ seront les vecteurs issus de* F *aux points de rencontre de* D *avec les deux plans d'intersection de* U *et* V.

Dans le cas où u et v ont deux foyers communs F et F', il y aura deux angles constants θ et φ pour chaque quadrique Q. Ces deux angles se construisent facilement. Supposons que u et v soient respectivement une ellipse et une hyperbole. Donnons-nous la quadrique Q en nous donnant les vecteurs focaux r, r' à un point quelconque du cercle de contact de Q et V. Construisons un triangle ABC ayant

$$AB = r, \qquad AC = r'$$

et BC égal au grand axe de u. Soit AD la bissectrice intérieure de l'angle ABC. Alors, B et C sont respec-

tivement θ et φ; BD, DC sont égaux aux rayons vecteurs focaux d'un point du cercle de contact de U et Q; AD est égal au segment de la génératrice de Q terminé par ses points de contact avec U et V. Pour construire la quadrique Q, on fait tourner le triangle ADC autour de AD jusqu'à ce que la distance BC soit égale à FF'; alors on superpose B et C sur F et F', et l'on fait tourner le tétraèdre FAF'D autour de FF'; AD engendre la quadrique Q.

La démonstration se fait sans difficulté si l'on tient compte de l'égalité des angles qu'une droite tangente à une quadrique de révolution fait avec les deux vecteurs focaux passant par le point de contact.

CORRESPONDANCE.

M. **Jan de Mézéas.** — *Au sujet de la question* **2101.** — L'auteur de cette question a fait une objection (présent Volume, p. 178) à la solution que j'en ai donnée (p. 189). Il me semble aisé d'y répondre. Soit, en reprenant mes notations, C une quintique tracée sur la surface S_2 et ayant pour équation

$$f(\lambda, \mu) = 0, \tag{1}$$

du second degré en λ et du troisième degré en μ. Soit D une génératrice quelconque de S_2, du système de celles qui sont pour C des sécantes triples. Par D et 11 points quelconques de C, je puis faire passer une surface du troisième ordre S_3 qui dépendra de

$$19 - 11 = 8 \text{ paramètres.}$$

On peut certainement trouver, et c'est l'essentiel, une surface S_3 qui ne se décompose pas en la quadrique S_2 et un plan quelconque, car une telle S_3 dégénérée ne dépendrait que de 3 paramètres.

S_3 coupe S_2 suivant une courbe ayant une équation de la forme (1) et ayant 11 points communs avec C; elle se confond donc avec cette dernière, car par 11 points quelconques de S_2 il ne passe qu'une courbe de la nature considérée.

Le raisonnement précédent fait retrouver que les surfaces du troisième ordre qui contiennent C dépendent de 5 paramètres, 1 pour D et les 4 comptés plus haut.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2107.

(1908, p. 180.)

On donne une parabole P *et une tangente fixe* T *à* P. *Le lieu des foyers des paraboles* Q *qui ont* T *pour tangente au sommet et qui sont tangentes à* P *est une parabole* R *tangente aussi à* T *ayant même foyer que* P *et dont l'axe est perpendiculaire à celui de* P. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION,

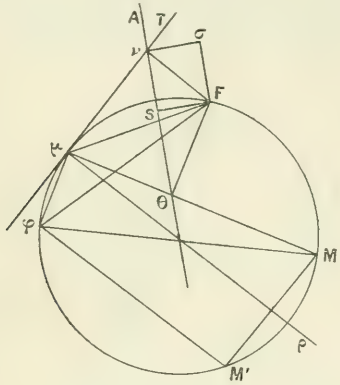
Par M. G. Pélissier.

Soient F le foyer de P, A sa tangente au sommet, M le point de contact de P et de Q, Mμ la tangente commune. Le foyer φ de Q s'obtient ainsi : on élève en μ la perpendiculaire $\mu\varphi$ à μM; on prend le symétrique M′ de M par rapport à la droite $\mu\rho$ perpendiculaire en μ à T; le point φ est à l'intersection de $\mu\varphi$ et de la parallèle M′φ à $\mu\rho$. Le quadrilatère $\varphi\mu$MM′ est inscriptible et le cercle circonscrit est tangent en μ à T. Ce cercle passe aussi par F, car c'est la limite du

cercle circonscrit au triangle formé par les deux tangentes T et $M\mu$ à P et par une troisième tangente venant se confondre avec $M\mu$. Il suit de là que

$$\widehat{M\varphi F} = \widehat{M\mu F}.$$

Or l'angle $\widehat{\mu F\theta}$, d'où l'on voit de F la portion de tangente $M\mu$ à P comprise entre les tangentes fixes A et T, est constant :



l'angle $\widehat{M\mu F}$ qui est son complément est donc aussi constant ainsi que $\widehat{M\varphi F}$. Le triangle rectangle $F\varphi M$ reste donc semblable à lui-même ; le sommet F est fixe, M décrivant P, φ décrit une parabole R déduite d'une parabole P′ homothétique de P par rapport à F par une rotation de 90° autour de F. R a donc pour foyer F et son axe est perpendiculaire à celui de P.

D'autre part, soient s le sommet de P, σ la projection de F sur la perpendiculaire $\nu\sigma$ menée par ν à A. Le quadrilatère inscriptible $\mu\nu F\theta$ montre que

$$\widehat{\theta\nu F} = \widehat{\theta\mu F} = \widehat{F\varphi M}.$$

Le triangle $s\nu F$ ou son égal $sF\sigma$ est donc semblable à $M\varphi F$, et σ est l'homologue de s dans la similitude qui transforme P en R ; σ est donc le sommet de R qui est dès lors tangente à T.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

2109.

(1908, p. 180.)

Du point où le cercle inscrit à un triangle donné touche un des côtés on abaisse une perpendiculaire sur la droite qui joint le milieu de ce côté au centre du cercle. Elle rencontre la hauteur issue du sommet opposé à ce côté en un point dont la distance au milieu du segment compris entre ce sommet et l'orthocentre du triangle est égale au rayon du cercle circonscrit au triangle donné.

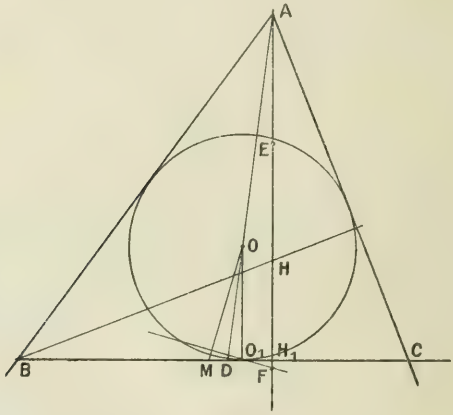
(CANON.)

SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

On sait que, si E est le milieu de AH,

$$EH = R\cos A \qquad (R = \text{rayon du cercle ABC});$$



d'autre part,

$$AH \times HH_1 = 3R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

On en déduit que

$$EH_1 = R\cos(B - C);$$

d'autre part,

$$H_1F = \frac{b-c}{2r} O_1H_1 \qquad (r = \text{rayon du cercle inscrit});$$

on doit donc avoir

$$R\cos(B-C)+\frac{b-c}{2r}O_1H_1=R$$

ou

$$O_1H_1\cos\frac{B+C}{2}=r\sin\frac{B-C}{2},$$

mais

$$r\sin\widehat{DOO_1}=DO_1\cos\frac{B-C}{2}=r\sin\frac{B-C}{2};$$

or

$$\frac{r}{AH_1}=\frac{DO_1}{DH_1}=\frac{a}{2p},$$

d'où

$$\frac{DO_1}{O_1H_1}=\frac{a}{b-c},$$

d'où

$$(b+c)\cos\frac{B+C}{2}=a\cos\frac{B-C}{2}$$

ou

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p};$$

comme

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-c},\qquad \operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-b}$$

et

$$r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p},$$

la relation (1) est une identité, ce qui démontre la proposition.

Autres solutions par MM. Barisien et Lez.

QUESTION.

2141. Soit l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{(axy+bz)-(fx+gy)}{(bpq+aw)+(gp+fq)}=\frac{1}{m}\qquad (px+qy=z+w);$$

la transformation de Legendre donne une équation du même type; les analogues des coefficients a, b, f, g, m étaient b, a, g, f, $\frac{1}{m}$.

Les équations des *caractéristiques* sont

$$\frac{z}{m} = (x - \alpha)(y - \beta) - \frac{a\alpha\beta + f\alpha + g\beta}{mb + a},$$

$$\frac{x - \alpha - \dfrac{a\alpha + g}{mb + a}}{\gamma} = \frac{y - \beta + \dfrac{a\beta + f}{mb + a}}{\delta} (= t);$$

ce sont des paraboles ayant leurs axes parallèles à Oz.

Les *développables caractéristiques* ont de même pour équations tangentielles, en mettant m' pour $\frac{1}{m}$,

$$\frac{w}{m'} = (p - \alpha')(q - \beta') - \frac{b\alpha'\beta' + g\alpha' + f\beta'}{m'a + b},$$

$$\frac{p - \alpha' + \dfrac{b\alpha' + f}{m'a + b}}{\gamma'} = \frac{q - \beta' + \dfrac{b\alpha' + g}{m'a + b}}{\delta'} (= t');$$

ce sont des cylindres paraboliques.

En supposant a et b non nuls, chaque caractéristique $\left(\alpha, \beta, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ correspond à une développable $\left(\alpha', \beta', \frac{\gamma'}{\delta'}\right)$; chaque élément ponctuel $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, t')$ correspond à un élément tangentiel $(\alpha', \beta', \gamma', \delta', t')$ d'après les relations

$$\frac{\gamma'}{\delta'} = \frac{\delta'}{\gamma'}, \qquad \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\beta'}{\alpha} = -m, \qquad \frac{t'}{mt} = \frac{\delta}{\gamma'} = \frac{\gamma}{\delta'}.$$

Si a est nul, l'équation aux dérivées partielles donnée par la transformation de Legendre est linéaire; les cylindres paraboliques dépendent seulement de deux paramètres, leurs équations tangentielles étant

$$\frac{p + \dfrac{f}{b}}{\gamma'} = \frac{q + \dfrac{g}{b}}{\delta'} = \frac{pq - mw}{\lambda'} (= t'),$$

et la correspondance entre les paraboles et les cylindres se traduit par les *deux* relations

$$\frac{\gamma'}{\delta'} = \frac{\delta'}{\gamma'}, \qquad m(\alpha\gamma' + \beta\delta') + \lambda' = 0.$$

(G. Fontené.)

[K'9a]

SUR LES LIGNES BRISÉES ET LES AIRES POLYGONALES DANS LE PLAN, A PROPOS DE LA DIVISION DU POLYGONE EN TRIANGLES;

PAR M. CH. MÉRAY.

(*Suite.*)

§ II. — CONTOURS ET AIRES DANS LE PLAN.

6. *Quand la ligne* $\mathfrak{L}$ *est interminée* (2, I, 2°), *elle-même et ses deux rives sont des figures illimitées* (109*, I).

I. *Une figure est illimitée, quand on ne peut tracer aucun contour triangulaire dont l'externat n'en contienne quelque point.*

1° *Étant pris arbitrairement un point* O *et une longueur* λ, *on peut assigner quelque contour triangulaire dont l'internat contienne* O, *et dont tout point* m *de l'externat soit à une distance de* O *supérieure à* λ.

A cet effet, nous partagerons l'angle replet de sommet O en trois angles obtus, par autant de demi-droites issues de ce point, sur lesquelles, à partir de lui, nous porterons trois segments $[O\alpha]$, $[O\beta]$, $[O\gamma]$ de longueurs $> \lambda$; sur les droites $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, nous élèverons ensuite des perpendiculaires en α, β, γ, respectivement.

L'angle en O du triangle $\beta O\gamma$ par exemple étant obtus, ses angles en β, γ sont aigus, ainsi par suite que

les angles saillants formés aux mêmes points avec $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\beta}$, par $\overline{\beta\beta'}$, $\overline{\gamma\gamma'}$, demi-perpendiculaires à $O\beta$, $O\gamma$ issues de β, γ, dans les demi-plans $\overline{O\beta\gamma}$, $\overline{O\gamma\beta}$. En outre, $\overline{\beta\beta'}$, $\overline{\gamma\gamma'}$ sont dirigées dans le demi-plan opposé à $\overline{\beta\gamma O}$, par là et parce que les demi-droites $\overline{\beta\gamma}$, $\gamma\beta$ sont visiblement intérieures aux angles droits formés avec $\overline{\beta O}$, γO par les mêmes demi-perpendiculaires. Ceci assure la rencontre de ces dernières en quelque point α (**224***, I) rendant $\overline{\beta\gamma\alpha}$ opposé à $\overline{\beta\gamma O}$, point intérieur en outre à l'angle saillant $\beta O\gamma$ parce qu'il appartient simultanément aux demi-plans $\overline{O\beta\gamma}$, $\overline{O\gamma\beta}$ dont cet angle est la partie commune. Comme le segment $[\beta\gamma]$ sous-tend ce même angle, il est coupé en un point intérieur α' par la demi-droite intérieure $\overline{O\alpha}$, et α' est intérieur aussi au segment $[O\alpha]$ dont les extrémités, comme nous venons de le voir, sont placées de part et d'autre de la droite $\beta\gamma$. La demi-droite $\overline{\alpha\alpha'}$ contient donc le point O, et, comme elle est intérieure à l'angle saillant $\beta\alpha\gamma$ parce que α' est tel relativement au segment $[\beta\gamma]$ qui sous-tend encore cet angle, son point O l'est également (**133***, *passim*).

Pour des causes semblables, les demi-perpendiculaires à $O\beta$, $O\gamma$, qui sont opposées à $\overline{\beta\alpha}$, $\overline{\gamma\alpha}$, couperont les demi-perpendiculaires en α à $O\alpha$, en certains points c, b, et le point O sera intérieur aux angles $\gamma b\alpha$, $\alpha c\beta$ du contour triangulaire $abca$, comme il l'était déjà à $\beta\alpha\gamma$. Il appartient donc à l'intérieur de ce contour.

Soient enfin m un point quelconque de son externat, μ la traversée du contour et du segment $[Om]$ (**4**, II, 1°), puis $[bc]$ pour fixer les idées, un côté du contour, contenant μ (intérieurement ou à une extrémité). On a $[Om] > [O\mu]$, parce que μ est visiblement intérieur

à $[Om]$, puis $[O\mu] \leqq [O\alpha] > \lambda$, parce que $[O\alpha]$ est la distance de O à la droite βc (263*). On a donc $[Om] > \lambda$, ce qui était à réaliser.

2° La construction du contour $\alpha\beta c\alpha$ du sous-alinéa précédent, faite en prenant pour O quelque point de la figure considérée, puis la combinaison de ses propriétés ci-dessus avec l'hypothèse, montrent immédiatement qu'aucune limite supérieure n'est assignable à la distance mutuelle de deux points indéterminés de cette figure.

II. Notre ligne interminée est une figure illimitée, parce que la restriction comportée par sa définition lui assure la possession de points appartenant à l'externat de tout triangle assignable (*cf.* 5, I, 1°).

Chacune de ses rives jouit de la même propriété, parce qu'on peut y trouver quelque point m aussi rapproché qu'on l'aura voulu, d'un point quelconque de la ligne, la pointe, si on le veut, d'un cil $[\mathfrak{m}m]$ convenablement choisi en nom et longueur.

III. Ici, rien d'*absolu* ne différencie les deux rives. On peut seulement, comme nous l'avons fait (5, III), les rapporter à quelque point P *spécialement* désigné, que l'une comprendra, que l'autre ne contiendra pas. Ou bien, à l'imitation de la Géographie pour les rivages d'un fleuve, et ceci de préférence dans certaines applications physiques, on suppose un corps humain couché sur la ligne, par une face *déterminée* (dorsale ou ventrale), la direction de la tête aux pieds s'identifiant avec un sens de parcours *préalablement* spécifié pour celle-ci, et l'on prend pour repères les bras droit et gauche étendus dans les deux rives, ce qui fournit immédiatement des dénominations très claires et com-

modes. La rive *droite* sera celle qui contient la pointe d'un cil appliqué sur le bras droit (3, III); les cils *droits* seront tous ceux, enchaînés, dont les pointes tombent dans la rive droite (5, V); les angles *de droite* seront tous ceux, enchaînés, auxquels les cils droits sont intérieurs (3, III); et semblablement, pour les chaînes composées par ces angles, pour..., finalement, pour la rive *gauche* et tout ce qui s'y rattache.

7. Mais, quand il s'agit d'un contour que nous désignerons par $\mathfrak{A}$, une différence essentielle se présente aussitôt entre les deux rives.

L'une est une figure illimitée, à laquelle finit par appartenir tout point mobile s'éloignant indéfiniment; l'autre est une figure limitée (109*, I).

I. *Cette proposition a lieu pour un contour triangulaire* $\mathfrak{T}$, *de sommets* α, β, γ.

1° *Il y a identité entre l'internat de ce contour et l'une de ses rives, entre son externat et l'autre rive* (4).

Deux points, savoir O de l'internat, U de l'externat, appartiennent, l'un à l'une des rives, l'autre à l'autre rive, puisque le segment [OU] traverse le contour une fois seulement (*Ibid*, II, 1°), (5, II, III). On en conclut que tous les points de l'internat appartiennent à une même rive, celle qui ne contient pas U (*Ibid.*); que, de même, tous les points de l'externat appartiennent à celle qui ne contient pas O, puis finalement, l'identité affirmée, puisqu'on retrouve tous les points étrangers au contour, en englobant ceux des deux rives, ou ceux aussi bien de l'internat et de l'externat.

2° *Dans la figure* $\{\overline{\mathfrak{T}}\}$ *formée par l'adjonction des points du contour à son internat* (adjonction faite

pour la commodité du langage seulement), *la distance mutuelle de deux points indéterminés ne peut surpasser la longueur du plus grand des côtés du contour.*

Si deux points m, n appartiennent à un même côté du contour, leur distance $[mn]$ est inférieure à la longueur de celui-ci, égale au plus. Si m, n sont en un sommet α et à l'intérieur du côté opposé, leur distance est inférieure à celui des deux côtés $[\alpha\beta]$, $[\alpha c]$, dont le pied β ou c sur la droite βc est le plus éloigné de celui de la perpendiculaire abaissé de α sur elle (263*).

Si m, n sont intérieurs à deux côtés $[\alpha\beta]$, $[\alpha c]$, leur distance est, de même, inférieure au plus grand des segments $[m\alpha]$, $[mc]$. Si m est sur le contour, n dans l'internat, la demi-droite opposée à $\overline{nm}$ coupe le contour en un point ν donnant $[mn] < [m\nu]$ (4, II, 1°). Si enfin, m, n appartiennent tous deux à l'internat, les demi-droites $\overline{mn}$, $\overline{nm}$ coupent le contour en des points ν, μ donnant $[mn] < [\mu\nu]$ (*Ibid.*).

Séparément, ou en combinaison, ces diverses observations fournissent la démonstration du fait énoncé, et celui-ci assure la limitation de la figure $\{\overline{\mathfrak{C}}\}$.

3° Dès qu'avec quelque point fixe de la figure $\{\overline{\mathfrak{C}}\}$, un point s'éloignant indéfiniment conserve une distance supérieure au plus grand côté du contour, il ne peut plus appartenir à cette figure. Il ne cesse donc plus d'être placé dans l'externat, ceci entraînant l'illimitation de cette rive.

II. *Des points a, b, ... étant donnés arbitrairement, mais en nombre limité, on peut assigner un contour triangulaire, à l'internat duquel tous appartiennent.*

Soient Δ, Δ', Δ'' trois droites arbitrairement choisies,

sans parallélisme toutefois entre deux quelconques, puis a', b', ... et a'', b'', ... les projections de a, b, ... sur Δ, faites parallèlement à Δ' et Δ''. Le nombre total de ces projections étant limité, on peut assigner sur Δ un segment $[\delta'\,\delta'']$ auquel toutes soient intérieures; d'après quoi (82*), (133*, I), les points a, b, ... le seront tous à l'angle $\delta'\,\partial\delta''$ pris saillant, notation où ∂ désigne l'intersection des droites $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ menées par δ', δ'' parallèlement à Δ', Δ''.

De cela, et de ce que les côtés $\overline{\partial\delta'}$, $\overline{\partial\delta''}$ de cet angle contiennent δ', δ'', on conclut facilement (115*, III) que ces côtés contiennent aussi $'a$, $'b$, ... et $''a$, $''b$, ... projections de a, b, ... faites sur $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$ parallèlement à Δ. Sur $\overline{\partial\delta'}$ par exemple, on peut donc assigner un point ∂'' limitant avec ∂ un segment $[\partial\partial'']$ auquel les projections $'a$, $'b$, ... soient intérieures.

En conséquence, et en nommant $\mathfrak{D}$ la parallèle à Δ menée par ∂'', coupant $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ en ∂'', ∂', les points a, b, ... seront, comme ces dernières projections, intérieurs au demi-plan $\overline{\mathfrak{D}\,\partial}$. Tous appartiendront donc à l'internat du contour $\partial\partial'\partial'\partial$, région contenant tous les points intérieurs à la fois, à l'angle saillant $\partial'\partial\partial''$ et au demi-plan $\overline{\partial'\partial''\partial}$ (277*, I).

III. *Tous les points de notre contour* $\mathfrak{K}$ *appartiennent aussi à un internat triangulaire* $\{\mathfrak{T}\}$ *construit de manière à en contenir les sommets* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... (II).

Car il en est ainsi pour chacun des segments $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$, ..., ses côtés (4, II, 3°).

Chemin faisant, on en conclut que *notre contour* $\mathfrak{K}$ *est une figure limitée* (I, 2°) (*cf.* V, 2°, *inf.*).

IV. Soient ensuite P un point fixe pris à volonté

dans l'externat du contour auxiliaire $\mathfrak{T}$ (III), et m un point mobile s'éloignant indéfiniment. Comme m finit par rester dans cette région, rive illimitée de ce contour (I, 3°), la possibilité d'y tracer exclusivement un chemin entre lui et P finit par exister (5, IX, 1°). Jamais ainsi ce chemin ne pouvant aborder le contour proposé $\mathfrak{K}$ dont tous les points appartiennent à l'internat $\{\mathfrak{T}\}$, m finit par appartenir à celle des rives de $\mathfrak{K}$ qui contient P (5), et celle-ci est une figure illimitée comme la longueur du segment $[\mathrm{P}m]$.

V. 1° De cette rive, que nous désignerons par $\{\mathfrak{K}\}_\infty$, et de l'autre $\{\mathfrak{K}\}$, nous pouvons maintenant déterminer les points placés sur une droite quelconque $\mathfrak{M}$, dont nous représenterons par $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$ des points mobiles s'éloignant indéfiniment, chacun dans une de ses deux directions opposées.

Si $\mathfrak{M}$ n'aborde pas le contour, ses points sont tous dans une même rive (5, IV), et celle-ci est $\{\mathfrak{K}\}_\infty$, parce que $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$ s'y trouvent quand ils sont suffisamment éloignés.

Autrement, le nombre de ses abords est limité comme celui des côtés, qu'il ne peut visiblement surpasser, et, si ces abords ne sont que des frôlements, tous ses points sont encore dans la même rive, sauf ceux des frôlements, puisqu'ils appartiennent au contour.

Quand il existe des traversées, celles-ci sont en nombre pair $2k$, parce qu'elles sont aussi celles du segment $[\mathfrak{m}'\mathfrak{m}'']$, à partir du moment où ses extrémités restent dans $\{\mathfrak{K}\}_\infty$ (5). Nous pourrons alors représenter les segments et points qui les constituent, par

$$[\mathrm{t}'_1\mathrm{t}''_1],\quad [\mathrm{t}'_2, \mathrm{t}''_2],\quad \ldots,\quad [\mathrm{t}'_{2k-2}\mathrm{t}''_{2k-2}],\quad [\mathrm{t}'_{2k-1}\mathrm{t}''_{2k-1}],\quad [\mathrm{t}'_{2k}\mathrm{t}''_{2k}],$$

en supposant les notations réglées de manière que

l'ordre

$$t'_1,\quad t''_1,\quad t'_2,\quad t''_2,\quad \ldots,\quad t'_{2k},\quad t''_{2k}$$

soit celui où leurs $4k$ extrémités sont rencontrées successivement par un point mobile décrivant $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{m}'$ à $\mathfrak{m}''$.

Cela posé, mais sauf ces extrémités et les autres points de tous les abords, les parties de $\mathfrak{M}$ appartenant à $\{\mathfrak{K}\}_\infty$ seront

$$(1)\quad [\mathfrak{m}'t'_1],\quad [t''_2t'_3],\quad [t'_4t''_5],\quad \ldots,\quad [t''_{2k-2}t'_{2k-1}],\quad [t''_{2k}\mathfrak{m}''],$$

où les notations extrêmes représentent les prolongements du segment $[t'_1t''_{2k}]$ au delà de ses première et seconde extrémités ; celles afférentes à $\{\mathfrak{K}\}$ seront les segments, ici tous limités,

$$(2)\qquad [t''_1t'_2],\quad [t''_3t'_4],\quad \ldots,\quad [t''_{2k-1}t'_{2k}].$$

Effectivement, on aperçoit de suite, que, sur $\mathfrak{M}$, les traversées séparant, des points $\mathfrak{m}'$ ou $\mathfrak{m}''$ indistinctement qui appartiennent à $\{\mathfrak{K}\}_\infty$, tout point $\mathfrak{m}$ étranger aux abords, sont en nombre pair ou impair selon qu'il est intérieur à l'un des segments (1) ou à l'un de la suite (2).

2° Deux points quelconques m, n de la rive $\{\mathfrak{K}\}$ étant ainsi intérieurs au segment $[t''_1\,t'_{2k}]$ construit sur leur droite mn comme sur $\mathfrak{M}$ tout à l'heure (1°), et les extrémités de celui-ci appartenant à l'internat du contour triangulaire $\mathfrak{T}$ (III), ses points intérieurs jouissent de la même propriété (4, II, 3°). Par quoi, la totalité de la rive en question n'est qu'une partie de cet internat, limitée comme lui (I, 2°).

VI. Comme si notre contour quelconque $\mathfrak{K}$ n'était que triangulaire (4), (I), nous nommerons *externat* et *internat* ses rives illimitée $\{\mathfrak{K}\}_\infty$ et limitée $\{\mathfrak{K}\}$.

Nous dirons *externes* ceux de ses cils dont les pointes appartiennent à son externat, ceux de ses angles auxquels ces cils sont intérieurs, la chaîne de ces angles, ...; et la qualification *interne* s'appliquera naturellement aux objets de mêmes noms pour son internat.

Un cil [$\mathfrak{m}m$ étant donné, on trouvera son nom en cherchant le nombre (essentiellement limité) des traversées du contour par la droite $\mathfrak{m}m$, qui sont *intérieures* à la demi-droite $\mathfrak{m}m$. Il sera visiblement externe ou interne, selon que ce nombre aura été trouvé pair ou impair (V).

Ce nom appartiendra en même temps à la rive où se trouve la pointe m du cil, à l'angle auquel sa demi-droite $\overline{\mathfrak{m}}m$ est intérieure, à la chaîne dont cet angle fait partie.

La même observation permet inversement d'assigner quelque cil de pied et de nom donnés, puis, par lui, un angle du contour dont le sommet et le nom ont été donnés; de déterminer, par cet angle, par la pointe du cil, une chaîne d'angles, une rive préalablement désignées.

Un premier point d'une rive ayant été obtenu ainsi, la manière la plus simple de la concevoir ensuite consiste à la considérer comme comprenant, avec ce point, les extrémités de tous les chemins issus de lui sans aborder le contour (5).

8. *Avec notre ligne interminée* $\mathfrak{L}$ (6), *ou notre contour* $\mathfrak{K}$ (7), *les traversées d'un autre contour quelconque* $\mathfrak{X}$ *sont toujours en nombre pair.*

1° Pour la ligne $\mathfrak{L}$, soit $\mathfrak{T}$, comme tout à l'heure (7, II et V, 2°), un contour triangulaire dont l'internat comprenne celui du contour $\mathfrak{X}$, dont l'externat, par

suite, soit compris dans celui de ce dernier (*Ibid.*, VI). Sur $\mathfrak{L}$, dans l'externat de $\mathfrak{T}$, on trouvera, de même qu'au n° 5, I, 1°, deux points $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{u}$ en détachant une partie qui contient tous ses abords avec $\mathfrak{X}$. Ces points se trouvant tous deux dans l'externat de ce dernier, il suffit de faire intervenir la seconde partie du théorème du dernier numéro cité.

2° Pour le contour $\mathfrak{K}$, le raisonnement se calque sur celui du même n° 5, I, 2°.

9. En traçant plusieurs lignes de toutes sortes, pour combiner entre elles quelques-unes, prises entières, et des chemins nés de leurs découpures mutuelles, on obtient des figures très variées qui présentent, tantôt identité, tantôt analogies seulement, avec les rives d'une ligne interminée ou d'un contour. Mais nous nous bornerons à l'examen d'un cas dont les résultats nous seront utiles à connaître, et dont l'exécution donnera une idée suffisante des spéculations de ce genre.

Un contour donné $\mathfrak{K}$ ayant été découpé, par deux points distincts $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ marqués arbitrairement sur lui, en deux chemins $\mathfrak{m}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\ldots\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'\mathfrak{n}$, ou $\mathfrak{C}'$ pour abréger, et $\mathfrak{m}\mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\ldots\mathfrak{g}''\mathfrak{h}''\mathfrak{n}$ ou $\mathfrak{C}''$, puis, un troisième $\mathfrak{m}\mathfrak{r}\ldots\mathfrak{w}\mathfrak{n}$ ou $\mathfrak{C}$ ayant été tracé, arbitrairement aussi, de $\mathfrak{m}$ à $\mathfrak{n}$, dans l'internat $\{\mathfrak{K}\}$ du contour, exclusivement, la fermeture des deux premiers par deux dédoublements de ce troisième donne deux nouveaux contours $\mathfrak{m}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\ldots\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'\mathfrak{n}\mathfrak{w}\ldots\mathfrak{r}\mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{K}'$, et $\mathfrak{m}\mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\ldots\mathfrak{g}''\mathfrak{n}\mathfrak{w}\ldots\mathfrak{r}\mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{K}''$, à propos desquels on a le théorème suivant :

I. *Les contours* $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ *sont déchevêtrés aussi.* — II. *Les angles internes de* $\mathfrak{K}'$ *sont : en* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, *les parties* $\mathfrak{a}'\mathfrak{m}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{h}'\mathfrak{n}\mathfrak{w}$ *ou* $\mathfrak{m}'_i$, $\mathfrak{n}'_i$, *détachées par les demi-droites* $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{r}}$, $\overline{\mathfrak{n}\mathfrak{w}}$, *de ceux* $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{n}_i$ *du proposé, et en*

$\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, ... $\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'$, *ceux mêmes de ce dernier. Et semblablement, pour les angles internes de* $\mathfrak{K}''$. — III. *Tout point de l'internat* $\{\mathfrak{K}'\}$ *de* $\mathfrak{K}'$ *appartient à* $\{\mathfrak{K}\}$, *en même temps à* $\{\mathfrak{K}''\}_\infty$ *externat de* $\mathfrak{K}''$, *et tout point de* $\{\mathfrak{K}''\}$ *appartient à* $\{\mathfrak{K}\}$, $\{\mathfrak{K}'\}_\infty$ *simultanément.* — IV. *Tout point de* $\{\mathfrak{K}\}$ *(étranger au chemin* $\mathfrak{C}$*) se retrouve, soit dans* $\{\mathfrak{K}'\}$, *soit dans* $\{\mathfrak{K}''\}$.

I. Le contour $\mathfrak{K}'$ est déchevêtré, parce que ses côtés $[\mathfrak{m}\mathfrak{a}']$, ..., $[\mathfrak{h}'\mathfrak{n}]$, appartenant à la ligne partielle $\mathfrak{C}'$, ne peuvent, ni se rencontrer en enchevêtrement mutuel à cause du déchevêtrement essentiel au proposé $\mathfrak{K}$, ni rencontrer ses autres côtés $[\mathfrak{m}\mathfrak{r}]$, ..., $[\mathfrak{w}\mathfrak{n}]$, parce que ceux-ci composent le chemin $\mathfrak{C}$ tracé exclusivement dans l'internat $\{\mathfrak{K}\}$.

II. 1° Parce que le premier côté $[\mathfrak{m}\mathfrak{r}]$ du chemin $\mathfrak{C}$, issu du sommet (facultatif ou essentiel) $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{K}$, n'a que ce point commun avec celui-ci, et que son extrémité $\mathfrak{r}$ appartient à $\{\mathfrak{K}\}$, la demi-droite $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{r}}$ est intérieure à l'angle interne $\mathfrak{m}_i$, le décompose additivement ainsi en deux parties $\mathfrak{a}'\mathfrak{m}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}''\mathfrak{m}\mathfrak{r}$ qui sont des angles $\mathfrak{m}'_i$, $\mathfrak{m}''_i$ de $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, dont il faut trouver les noms.

A cet effet, nous construirons (7, II) un contour triangulaire $\mathfrak{T}$ dont l'internat $\{\mathfrak{T}\}$ contienne tous les sommets de $\mathfrak{K}$, en conséquence, ses côtés et internat (*Ibid.*, III, et V, 2°), en particulier le chemin $\mathfrak{C}$ tracé dans ce dernier, puis ainsi, les côtés et internats de $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ aussi, contour dont, par suite, l'externat $\{\mathfrak{T}\}_\infty$ soit compris dans chacun de ceux de ces derniers. Ensuite, nous nommerons $[\mathfrak{m}l]$ un cil, de pied $\mathfrak{m}$, externe pour $\mathfrak{K}$, et P un point marqué arbitrairement dans $\{\mathfrak{T}\}_\infty$, pouvant par suite être joint à l par un chemin P...l, se trouvant tout entier dans $\{\mathfrak{K}\}_\infty$ (5, VII), n'ayant

ainsi aucun point commun avec $\mathfrak{K}$, ni avec $\mathfrak{C}$ dont rien n'appartient à $\{\mathfrak{K}\}_\infty$, ni par là, avec $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$.

De $\mathfrak{m}$ pris encore pour pied, nous pourrons, dans l'angle $\mathfrak{m}'_i$, puisqu'il est une partie de $\mathfrak{m}_i$, tracer un cil interne $[\mathfrak{m}m']$ du contour $\mathfrak{K}$, le faire en outre assez petit pour n'avoir rien de commun non plus (sauf $\mathfrak{m}$) avec le chemin $\mathfrak{C}$; par quoi il sera aussi un cil de $\mathfrak{K}'$, et sa pointe m', appartenant déjà à $\{\mathfrak{K}\}$, tombera dans une rive de $\mathfrak{K}'$ à déterminer maintenant.

Le chemin P... $l\mathfrak{m}m'$, consistant en P... $l\mathfrak{m}$ allongé en $\mathfrak{m}$ du cil $[\mathfrak{m}m']$, n'a d'autre abord avec $\mathfrak{K}$, avec $\mathfrak{K}'$ aussi bien, que le point $\mathfrak{m}$ qui est une traversée dans les deux cas, savoir : avec $\mathfrak{K}$, parce que ses extrémités P, m' tombent respectivement dans les rives opposées de ce contour (5) ; avec $\mathfrak{K}'$, parce que cette première traversée qui place l'amorce $[\mathfrak{m}l]$ dans l'intérieur du biadjacent $\mathfrak{m}_e$ de l'angle interne $\mathfrak{m}_i$ de $\mathfrak{K}$ la dirige *a fortiori* dans celui de $\mathfrak{m}'_e$ biadjacent de $\mathfrak{m}'_i$. Effectivement, ce dernier étant compris dans $\mathfrak{m}_i$, son biadjacent $\mathfrak{m}'_e$ comprend au contraire celui de $\mathfrak{m}_i$; d'ailleurs, l'autre amorce $[\mathfrak{m}m']$ a été prise intérieure à $\mathfrak{m}'_i$. De l'existence de cette traversée unique du chemin P... $l\mathfrak{m}m'$ avec $\mathfrak{K}'$, et de la situation de son extrémité P dans l'externat $\{\mathfrak{K}'\}_\infty$ de celui-ci, il résulte que l'autre extrémité m' appartient à son internat $\{\mathfrak{K}'\}$, puis, que le cil $[\mathfrak{m}m']$ et l'angle $\mathfrak{m}'_i$ auquel la demi-droite $\overline{\mathfrak{m}}m'$ est intérieure, sont internes pour le même contour.

Et semblablement, pour l'autre angle analogue $\mathfrak{n}'_i$ de $\mathfrak{K}'$, pour ceux, $\mathfrak{m}''_i$, $\mathfrak{n}''_i$, de $\mathfrak{K}''$, après construction, pour ce contour, d'un cil interne $[\mathfrak{m}m'']$ analogue à $[\mathfrak{m}m']$.

2° En $\mathfrak{a}'$, l'angle interne $'\mathfrak{a}'_i$ du contour $\mathfrak{K}'$ est, par définition (3, II), celui des biadjacents en ce sommet, auquel le piquetage $\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'\mathfrak{m}$ confère l'homotaxie avec son

angle interne $\mathfrak{m}'_i$ piqueté $\mathfrak{a}'\mathfrak{m}\mathfrak{r}$; et l'angle interne $\mathfrak{a}'_i$ du proposé $\mathfrak{K}$ est pareillement celui de ses biadjacents en $\mathfrak{a}'$, que le même piquetage rend homotaxique à $\mathfrak{m}_i$ piqueté $\mathfrak{a}'\mathfrak{m}\mathfrak{a}''$. Mais les piquetages précités imposent l'homotaxie encore aux angles $\mathfrak{m}'_i$, $\mathfrak{m}_i$, parce que leurs premiers côtés sont superposés en $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}'$, et que le second côté $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{r}}$ du premier est intérieur au dernier, d'après le tracé du chemin $\mathfrak{C}$. Les angles $'\mathfrak{a}'_i$, $\mathfrak{a}'_i$ sont donc, non biadjacents, mais identiques, parce que, piquetés tous deux $\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'\mathfrak{m}$, ils sont homotaxiques.

L'identité des angles suivants, $'\mathfrak{b}'_i$, $\mathfrak{b}'_i$ a pour cause l'état de superposition de leurs sommets et côtés, combiné pareillement avec l'homonymie des relations topographiques que le même piquetage $\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'$ impose à l'un et à l'autre, avec leurs enchaînés sur $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}$, savoir les angles identiques $'\mathfrak{a}'_i$, $\mathfrak{a}'_i$ affectés tous deux du même piquetage $\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'\mathfrak{m}$, comme tout à l'heure. Et de même, pour ..., jusqu'à $'\mathfrak{g}$, $'\mathfrak{h}'_i$.

Et semblablement, pour $''\mathfrak{a}''_i$, $''\mathfrak{b}''_i$, ..., $''\mathfrak{g}''_i$, $''\mathfrak{h}''_i$ dans $\mathfrak{K}''$.

III. 1° *Sauf ses extrémités* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, *le chemin* $\mathfrak{C}''$ *appartient tout entier à l'externat de* $\mathfrak{K}'$.

La demi-droite $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{r}}$ étant intérieure à l'angle $\mathfrak{m}_i$ de côtés $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}'$, $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}''$, la seconde de ces demi-droites l'est au biadjacent $\mathfrak{m}'_e$ de $\mathfrak{m}'_i$, ces deux-ci de mêmes côtés $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}'$, $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{r}}$; et, comme $\mathfrak{m}_i$ est interne pour le contour $\mathfrak{K}'$ (II, 1°), l'autre $\mathfrak{m}'_e$ est externe. On en conclut que $[\mathfrak{m}\mathfrak{a}'']$ est un cil externe pour $\mathfrak{K}'$, puis, que sa pointe $\mathfrak{a}''$ appartient à $\{\mathfrak{K}'\}_\infty$, et $\mathfrak{h}''$ s'y trouve aussi pour des causes semblables. Le chemin $\mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\ldots\mathfrak{g}''\mathfrak{h}''$ y est donc tracé tout entier, puisque ses extrémités appartiennent à cette rive de $\mathfrak{K}'$ et qu'il n'aborde pas ce dernier; le chemin $\mathfrak{m}\mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\ldots\mathfrak{g}''\mathfrak{h}''\mathfrak{n}$, ou $\mathfrak{C}''$ également (sauf les restrictions concernant ses extrémités).

Et semblablement, pour le chemin $\mathfrak{C}'$ et le contour $\mathfrak{K}''$.

2° Soit maintenant n' un point quelconque de $\{\mathfrak{K}'\}$, que, par suite, nous pouvons réunir à m', autre point du même internat (II, 1°), par un chemin s'y trouvant tout entier. Ce chemin n'abordant ni la partie $\mathfrak{C}'$ du contour proposé $\mathfrak{K}$ pour cette cause, ni son autre partie $\mathfrak{C}''$ (1°), tous ses points appartiennent à une même rive de ce contour, qui est $\{\mathfrak{K}\}$, puisque m' s'y trouve. Le point considéré n' appartient donc aussi à cet internat.

Et semblablement, pour tout point n'' de $\mathfrak{K}''$.

3° Revenons au cil interne $[\mathfrak{m}m'']$ dont la construction pour $\mathfrak{K}''$ a été mentionnée plus haut (II, 1°, *in fine*).

Comme la demi-droite $\overline{\mathfrak{m}a}''$ est intérieure à $\mathfrak{m}'_e$ angle externe de $\mathfrak{K}'$ (1°), elle le décompose en deux parties dont l'une est $\mathfrak{m}''_i$, et la demi-droite $\overline{\mathfrak{m}}m''$ intérieure à ce dernier l'est aussi à $\mathfrak{m}'_e$. Les cils $[\mathfrak{m}m']$, $[\mathfrak{m}m'']$ étant ainsi intérieurs, le premier à $\mathfrak{m}'_i$, le second à $\mathfrak{m}_e$, et ces angles étant déchaînés dans $\mathfrak{K}'$, ce contour est traversé au point unique $\mathfrak{m}$ par le chemin $m'\mathfrak{m}m''$. L'extrémité m'' de celui-ci appartient donc à $\{\mathfrak{K}'\}_\infty$, puisque l'autre m' est dans $\{\mathfrak{K}'\}$.

Soit enfin n'' un autre point de l'internat de $\mathfrak{K}''$, qu'ainsi nous pouvons joindre à m'' par un chemin $m''\ldots n''$ sans abord avec ce contour, avec sa partie $\mathfrak{C}$ en particulier, ni, par suite, avec $\mathfrak{K}'$ composé de $\mathfrak{C}$ et de $\mathfrak{C}'$ qui est tout entier dans $\{\mathfrak{K}''\}_\infty$ (1°). Par là, et par ce qui précède, le chemin $m'\mathfrak{m}m''\ldots n''$ traverse $\mathfrak{K}'$ au point unique $\mathfrak{m}$. Son extrémité n'' appartient donc encore à $\{\mathfrak{K}\}_\infty$, parce que l'autre m' se trouve dans $\{\mathfrak{K}\}$.

Et semblablement, pour tout point n' de $\{\mathfrak{K}'\}$, relativement à $\{\mathfrak{K}''\}_\infty$.

IV. Pour terminer, soient n un point quelconque de l'internat du contour proposé, composé de $\mathfrak{C}'$ et de $\mathfrak{C}''$, puis $m' \ldots n$ un chemin conduisant de m' à n, sans abord avec lui. Comme ainsi ce chemin n'aborde ni la partie $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{K}'$, ni la partie $\mathfrak{C}''$ de $\mathfrak{K}''$, le nombre θ de ses traversées avec leur partie commune $\mathfrak{C}$ est aussi celui de ses abords du même nom avec $\mathfrak{K}'$ ou $\mathfrak{K}''$, indistinctement.

Si donc θ est pair, son extrémité n appartiendra à $\{\mathfrak{K}'\}$, puisque l'autre m' s'y trouve. S'il est impair, n appartiendra à l'internat de $\mathfrak{K}''$; effectivement, m' est dans son externat, puisqu'il appartient à $\{\mathfrak{K}'\}$ (III, 3, *in fine*).

10. Jusqu'au n° 11 (*inf.*), il nous sera commode de réduire, au seul mot *diagonale* d'un contour donné quelconque $\mathfrak{K}$ non triangulaire, la désignation d'une diagonale *essentielle*, *interne*, c'est-à-dire de tout segment terminé par deux sommets essentiels et dont les points intérieurs appartiennent en totalité à son internat $\{\mathfrak{K}\}$.

Au moyen de côtés et de diagonales du contour considéré, on peut former, en nombre limité, des contours triangulaires qui remplissent les conditions suivantes : l'internat de chacun appartient à celui du proposé, mais à l'externat de chacun des autres, et l'internat du contour proposé est reproduit par la réunion de ceux de tous les contours triangulaires ainsi construits, avec adjonction des points intérieurs aux diagonales employées.

I. *Le contour possède une diagonale au moins.*

Soient $\mathfrak{e}_i$ un quelconque de ses angles internes non neutres (7, VI), et $[\mathfrak{ed}]$, $[\mathfrak{ef}]$ ses côtés essentiels, soudés au sommet $\mathfrak{e}$. Une demi-droite mobile $\mathfrak{e}m$ restant intérieure à cet angle conservera certainement, avec le con-

tour, quelque abord (ne contenant pas son origine $\mathfrak{e}$); car, si elle arrivait à ne pas le traverser, tous ses points appartiendraient à l'externat, et $\mathfrak{e}_i$ serait un angle externe contrairement à l'hypothèse. En nommant alors $\mathfrak{m}$ le point de tous ces abords qui est le plus rapproché de $\mathfrak{e}$, le segment $[\mathfrak{em}]$ ne devient jamais nul, sans quoi le contour serait enchevêtré en $\mathfrak{e}$.

Si, dans une position initiale de $\overline{\mathfrak{e}m}$ prise au hasard, $\mathfrak{m}$ est un sommet essentiel, ce segment est une diagonale, parce que ses extrémités sont des sommets du contour, et que tous ses points intérieurs appartiennent à l'internat de celui-ci (7, V).

Si, au contraire, $\mathfrak{m}$ est intérieur à un côté $[\mathfrak{s}\mathfrak{z}]$, nous l'y ferons mouvoir, à partir de cette première position, d'abord dans quelque sens constant, puis dans le sens opposé, jusqu'à survenue, visiblement nécessaire, de l'un ou l'autre des accidents suivants : 1° $\mathfrak{m}$ atteint l'un des sommets $\mathfrak{s}, \mathfrak{z}$, sans que la demi-droite $\overline{\mathfrak{em}}$ ait, avec le contour, ou ait eu, quelque point commun, intérieur au segment $[\mathfrak{em}]$; 2° avant que $\mathfrak{m}$ ait atteint un de ces deux points, cette demi-droite arrive en une position où elle présente, avec le contour, un ou plusieurs abords, parmi les points de tous lesquels, le plus rapproché, $\mathfrak{n}$, de $\mathfrak{e}$, est intérieur au segment $[\mathfrak{em}]$; 3° elle s'applique sur l'un, puis sur l'autre des côtés $\overline{\mathfrak{ed}}$, $\overline{\mathfrak{ef}}$ de l'angle considéré, sans qu'aucune des deux éventualités précédentes se soit présentée auparavant. [Le cas où la demi-droite mobile atteindrait, dans des conditions différentes, un point $\mathfrak{n}$ d'un côté autre que $[\mathfrak{s}\mathfrak{z}]$, a été tacitement écarté ; effectivement, si $\mathfrak{n}$ était sur $[\mathfrak{s}\mathfrak{z}]$ (ou bien en $\mathfrak{e}$) le contour y serait enchevêtré ; s'il n'appartenait qu'à l'autre côté, il en serait une extrémité libre de soudure, et la ligne considérée $\mathfrak{K}$ y serait ouverte, au lieu d'être un contour.]

1° Le segment [es], ou [e3], répond à la question, comme [em] avant l'ouverture de cette discussion.

2° L'abord survenu est un frôlement, parce que, en cas de traversée, si celle-ci avait un point commun avec [s3], le contour y serait enchevêtré ; si elle n'en avait aucun, une position antérieure de la demi-droite $\overline{em}$ aurait rencontré le contour en quelque point intérieur au segment [em]. Quant au point n, il est un sommet du contour, parce qu'il fait partie d'un frôlement d'une droite, em, avec une ligne brisée, K, abord se réduisant visiblement à un sommet, ou bien embrassant la totalité d'un côté essentiel, et que si, dans le dernier cas, il était intérieur à ce côté d'abordage, il ne serait pas le plus rapproché de e parmi tous les points de celui-ci. Le segment [en] répond donc à la question, comme [em], tout à l'heure.

3° On aperçoit immédiatement que $\overline{ed}$, $\overline{ef}$, côtés de l'angle e_i, coupent la droite s3 du côté considéré, en des points d', f' limitant un segment dont tous les points appartiennent à ce côté, et qui est décrit par m, en même temps que l'angle e_i par $\overline{em}$, ceci conférant à cet angle la propriété d'être saillant. En outre, d' ne peut être intérieur au côté [ed], ni f' à [ef], car, autrement, le contour y serait enchevêtré. Enfin, les points intérieurs au segment variable [em] ne cessent jamais d'appartenir à l'internat du contour.

Maintenant, si d', f' appartiennent aux prolongements des côtés [ed], [ef] au delà de leurs extrémités d, f, les demi-droites $\overline{dd'}$, $\overline{ff'}$ sont opposées à $\overline{de}$, $\overline{fe}$; par quoi, d', f' sont tous deux intérieurs à l'opposé du demi-plan $\overline{dfe}$. Et le segment [d'f'] est tel en même temps; car, si l'un de ses points intérieurs appartenait à $\overline{dfe}$ ou à son arête seulement, ses extrémités d', f' ne

seraient pas dans le demi-plan opposé, toutes deux. En faisant donc décrire l'angle $\mathfrak{e}_i$ par la demi-droite $\overline{\mathfrak{e}m}$, et considérant, avec sa trace $\mathfrak{m}$ sur $[\mathfrak{d}'\mathfrak{f}']$, son intersection μ avec $[\mathfrak{d}\mathfrak{f}]$ autre segment sous-tendant cet angle, les demi-droites $\overline{\mu\mathfrak{e}}$, $\overline{\mu\mathfrak{m}}$ sont sans cesse opposées, et le point μ reste ainsi intérieur au segment $[\mathfrak{e}\mathfrak{m}]$. Il appartient donc sans cesse à l'internat du contour, ce qui confère la qualité de diagonale au segment $[\mathfrak{d}\mathfrak{f}]$ décrit par lui.

Et semblablement, si $\mathfrak{d}'$ se confondait avec $\mathfrak{d}$, ou bien $\mathfrak{f}'$ avec $\mathfrak{f}$.

Si ces confusions existaient toutes deux, notre côté $[\mathfrak{s}\mathfrak{z}]$ ne serait pas autre chose que le segment $[\mathfrak{d}\mathfrak{f}]$, et notre contour serait triangulaire, cas écarté.

(On aperçoit ainsi que *le contour peut être dépourvu de toute diagonale issue d'un sommet donné*, ceci se présentant visiblement quand on se trouve en présence de l'éventualité 3°. Mais, *si l'angle $\mathfrak{e}_i$ est rentrant, l'existence d'une telle diagonale est certaine.* Cette éventualité ne peut effectivement se produire, parce que la droite $\mathfrak{s}\mathfrak{z}$ ne peut rencontrer simultanément les deux côtés d'un tel angle.)

II. 1° Les extrémités $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ d'une diagonale $[\mathfrak{m}\mathfrak{n}]$, que nous noterons $\mathfrak{C}$ (I), divisent notre contour $\mathfrak{K}$ en deux chemins $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ dont les associations avec des dédoublements de $\mathfrak{C}$ donnent deux nouveaux contours $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$; et ces diverses figures jouissent des propriétés relatives de celles qui ont été étudiées tout à l'heure sous les mêmes notations (9), avec une particularité spéciale : le chemin $\mathfrak{C}$, simple segment rectiligne, n'ayant aucun sommet essentiel, les deux contours dérivés, dans leur ensemble, non seulement possèdent tous les sommets essentiels du proposé, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ pris deux fois chacun,

mais ils n'en ont point d'autres, et ils n'ont d'autres angles internes que les siens ailleurs qu'en $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, que de simples parties $\mathfrak{m}'_i$, $\mathfrak{m}''_i$ et $\mathfrak{n}'_i$, $\mathfrak{n}''_i$ de $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{n}_i$ en ces derniers sommets.

Dans chacun des contours dérivés, s'il n'est triangulaire, on pourra donc (I) tracer une diagonale qui, naturellement, sera distincte de $\mathfrak{C}$ et appartiendra visiblement au proposé, puis en dériver deux nouveaux contours auxquels les mêmes remarques sont applicables, puis recommencer l'opération sur chacun de ces contours deux fois dérivés; et ainsi de suite, autant que faire se pourra.

2° Dans l'ensemble de tous les contours, originaire et dérivés, procurés successivement par ces opérations, comme dans une famille d'êtres vivants multipliés par fissiparité, on peut dire deux d'entre eux, *apparentés :* premièrement *en ligne directe, au degré* δ, quand l'un $\mathfrak{K}^{(i)}$ l'*ascendant*, l'autre $\mathfrak{K}^{(i+\delta)}$ le *descendant,* terminent une suite, $\mathfrak{K}^{(i)}, \ldots, \mathfrak{K}^{(i+\delta)}$, de $\delta + 1$ contours, dans laquelle chaque intermédiaire et le dernier ont été engendrés de leurs antécédents immédiats, comme $\mathfrak{K}'$ par exemple l'a été de $\mathfrak{K}$; deuxièmement, en *ligne collatérale*, quand ils ne le sont pas en ligne directe. Ces dénominations faciliteront sensiblement l'énonciation de certains élargissements des observations précédentes, qui s'apercevront aisément :

Les côtés, sommets et diagonales d'un descendant se retrouvent tous parmi les éléments similaires de l'un quelconque de ses ascendants.

Chacun de ses angles internes est, pour l'ascendant, un tel angle ou l'une de ses parties; son internat est une partie de celui de l'ascendant.

Les internats de deux collatéraux n'ont aucun point commun.

Si, dans la famille, on forme une représentation complète, c'est-à-dire si l'on groupe plusieurs collatéraux, tels, en nombre et autrement, que tout autre membre soit apparenté en ligne directe à quelqu'un d'entre eux, tout point de l'internat du contour proposé se retrouve dans celui de l'un ou de l'autre des membres de cette représentation, ou bien à l'intérieur d'une diagonale employée.

III. Dans le passage d'un membre quelconque de la famille à un descendant immédiat, le nombre des côtés diminue d'une unité au moins; car, si la diagonale employée en apporte, il est vrai, un nouveau, son tracé en enlève deux au moins. La génération indéfinie de nos contours, dérivés chacun d'un ascendant au premier degré, ne peut donc manquer, dans toutes les directions, d'aboutir et de s'arrêter à des contours exclusivement triangulaires. Comme ceux-ci composent visiblement une représentation complète, il suffit de leur appliquer les observations ci-dessus (II, 2°) pour achever la démonstration de notre théorème.

11. I. Aux n°s 277* et suiv., 282* et suiv., j'ai donné, au point de vue géométrique et numérique, des définitions maintenant précises, pour l'aire d'un triangle, puis pour une aire polygonale quelconque, quand on sait toutefois celle-ci formée par l'addition géométrique d'aires triangulaires juxtaposées les unes aux autres, toutes extérieurement. La proposition précédente (10) comble les lacunes principales qu'y a laissées la suppression de la démonstration des faits énoncés au n° 277*, IV, V, toutes même (278*, II), par l'application aussi facile du théorème (10) à des diagonales internes *non essentielles*.

(Pour cette dernière proposition, la substitution à l'internat de chaque contour, de son aire, figure englobant la totalité des points de l'un et de l'autre, ramène son énoncé à ses termes habituels, sinon aussi précis, du moins plus brefs et suffisamment clairs.)

II. Les suppressions rappelées ci-dessus (I) ont affaibli aussi, dans sa base rationnelle, la partie I de la démonstration du théorème du n° 281* sur la somme des angles internes essentiels d'un contour. Cette base est actuellement consolidée par l'observation suivante, à ajouter à celles de l'alinéa II, 2°, du n° 10 : *Dans une représentation complète, la somme de tels angles, faite pour tous ses membres, reproduit celle des angles du même genre dans le contour originaire.*

III. La considération des angles essentiels d'un contour fournit un autre criterium (*cf.* 7, VI) pour distinguer ses rives.

En nommant N le nombre de ses côtés (essentiels), $\mathfrak{N}$ la mesure de l'angle neutre, on sait effectivement, d'après le théorème rappelé à l'instant (II), que $(N-2)\mathfrak{N}$ mesure la somme des angles internes, $(N+2)\mathfrak{N}$, par suite, celle des angles externes.

De deux angles biadjacents considérés au hasard, l'interne appartiendra donc à la chaîne de moindre somme, et deux cils tracés, l'un à l'intérieur de cet angle, l'autre à l'extérieur, signaleront l'internat du contour et son externat, respectivement.

12. La notion de *polygone convexe* présente des obscurités assez marquées par la diversité des définitions reçues en cette matière, sans réduction faite encore des unes aux autres. Les moyens employés dans

cette Note permettent de l'éclaircir, et c'est par là qu'elle se terminera.

I. Je partirai des définitions ci-après :

1° Au sommet commun de deux angles biadjacents non neutres, une ligne ouverte (2, I, 1°, 2°) est *convexe vers l'extérieur* de son angle saillant, *concave vers celui* de son angle rentrant.

2° En un sommet essentiel, un contour est *convexe* (vers son externat), si est interne son angle vers l'extérieur duquel cette qualification lui est applicable dans le sens relatif ci-dessus (1°), en conséquence, si son angle interne est saillant; il est *concave*, si cet angle est rentrant.

3° Il est *convexe*, absolument parlant, quand il est tel en chacun de ses sommets (2°), c'est-à-dire quand tous ses angles internes sont saillants.

II. *Quand un contour donné* $\mathfrak{K}$ *est convexe* (I, 3°), *une droite indéterminée* $\mathfrak{D}$ *ne l'aborde jamais qu'en un frôlement, ou bien deux traversées, celles-ci consistant en des points.*

1° *Quand un abord* $[qr]$ *entre une droite* $\mathfrak{D}$ *et une ligne quelconque* $\mathfrak{L}$ *ne se réduit pas à un point, les angles de* $\mathfrak{L}$ *auxquels sont intérieures ses amorces* $[q\mathfrak{p}]$, $[rs]$ *sur* $\mathfrak{D}$ *sont tous deux rentrants.*

En effet, cet abord se confond avec un côté essentiel de $\mathfrak{L}$ (3, IV, 1°, *in fine*), et l'angle de celle-ci, en q par exemple, dont il s'agit, est la somme de l'angle neutre $rq\mathfrak{p}$ et de l'angle saillant $\mathfrak{p}q\mathfrak{p}$.

2° *Un frôlement entre notre contour et la droite* $\mathfrak{D}$ *n'est accompagné d'aucun autre abord.*

Soient $[qr]$ le frôlement dont l'existence est admise et que nous supposerons d'abord ne pas se réduire à

un point (*Ibid.*), puis $[q\mathfrak{p}]$, $[r\mathfrak{s}]$ ses amorces sur $\mathfrak{K}$, puis $\overline{q}q'$, $\overline{r}r'$ les prolongements du segment $[qp]$ au delà de ses extrémités q, p, finalement k, v, si quelque autre abord accompagnait celui-ci, les premiers des points de $\mathfrak{D}$ que feraient rencontrer des marches sur le contour, exécutées, la première à partir de q, dans le sens $q\mathfrak{p}$ ..., l'autre à partir de r dans le sens $r\mathfrak{s}$ ....

En ayant égard au déchevêtrement du contour et à l'identité des demi-plans $\overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{p}$, $\overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{s}$, on apercevra aisément l'impossibilité de l'opposition des demi-droites dans les paires $\overline{q}q'$, $\overline{q}k$ et $\overline{r}r'$, $\overline{r}v$ à la fois, ceci assurant leur identité dans l'une des paires au moins, qui sera la seconde par exemple. Comme ainsi le chemin $r\mathfrak{s}$ ... v n'a aucun point commun avec la droite $\mathfrak{D}$ (sauf ses extrémités r, v), il est fermé par le segment $[rv]$ de celle-ci en un contour $\mathfrak{X}$ dont les angles saillants r'_i, v'_i, de notations explicites $vr\mathfrak{s}$, $rv\mathfrak{u}$, sont internes pour lui. Effectivement, les prolongements de leurs côtés autres que $\overline{r}\mathfrak{s}$, $\overline{v}\mathfrak{u}$ sont ceux du segment $[rv]$, demi-droites qui n'ont aucun point intérieur commun avec ce contour $\mathfrak{X}$ et sont intérieures aux biadjacents de ces angles, ceci montrant facilement que ces biadjacents sont externes pour lui (7, VI).

Cela posé, r''_e, angle du contour $\mathfrak{K}$ en r, auquel la demi-droite $\overline{r}v$ est intérieure, est externe pour lui, supposé convexe, parce qu'il est rentrant (1, 3°), (1°). Et, en $\mathfrak{s}$, ..., $\mathfrak{u}$, les angles internes $\mathfrak{s}''_i$, ..., $\mathfrak{u}''_i$ de $\mathfrak{K}$ sont les biadjacents de $\mathfrak{s}'_i$, ..., $\mathfrak{u}'_i$, autres angles internes de $\mathfrak{X}$; effectivement, on constatera sans peine que l'enchaînement de ces derniers à r'_i sur $\mathfrak{X}$ entraîne leur enchaînement à r''_e sur $\mathfrak{K}$, leur déchaînement par suite, sur ce même contour, à r''_i biadjacent de r''_e, qui est interne pour lui.

Quand le frôlement en question se réduit à un point, le raisonnement reste le même, sauf attribution des notations $\overline{q}q'$, $\overline{r}r'$ aux moitiés de la droite $\mathfrak{D}$ qui sont placées dans les demi-plans $\overline{r\mathfrak{s}\mathfrak{p}}$, $\overline{q\mathfrak{p}\mathfrak{s}}$, respectivement.

Soient enfin N (>2, visiblement) le nombre des sommets de $\mathfrak{K}$, $N-2$, par suite, celui de ses angles internes $\mathfrak{s}'_i$, ..., $\mathfrak{n}'_i$ seulement. Si tous ces angles étaient rentrants, leur somme, à eux seuls, serait plus grande que $(N-2)\mathfrak{T}$, somme de tous les internes de ce contour (11, II). Ceci étant impossible, l'un d'eux au moins, $\mathfrak{s}'_i$ par exemple, serait saillant, et le contour proposé $\mathfrak{K}$ aurait en $\mathfrak{s}$ un angle interne rentrant $\mathfrak{s}''_i$, fait incompatible avec sa convexité supposée.

3° *Toute traversée se réduit à un point.* Car, si elle embrassait la totalité $[qr]$ d'un côté du contour, les angles de celui-ci en q, r auxquels sont intérieures les amorces de cet abord sur $\mathfrak{D}$ seraient tous deux rentrants (1°), et, comme ils sont déchaînés (3, IV, 2°), l'un d'eux serait interne pour lui, ceci contredisant encore la convexité attribuée au contour (I, 3°).

4° *Les traversées, quand il en existe, sont en nombre* $=2$, *consistant en de simples points* (3°) *et n'étant accompagnées d'aucun frôlement* (2°).

Comme il y en a plus d'une, parce que le nombre des traversées d'un contour et d'une droite est toujours pair (8), considérons les deux extrêmes, savoir celles qui limitent un segment ayant toutes les autres dans son intérieur, et nommons $\mathfrak{m}$ l'une d'elles, puis $\mathfrak{n}$ la plus rapprochée de celle-ci parmi les autres.

Tous les points intérieurs au segment $[\mathfrak{m}\mathfrak{n}]$ appartiennent à l'internat de $\mathfrak{K}$, parce que son prolongement au delà de $\mathfrak{m}$ est placé tout entier dans l'externat (*sup.*), et que la demi-droite $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}$ n'est pas traversée

par le contour à l'intérieur du même segment. On en conclut (9) qu'avec les deux chemins conduisant de $\mathfrak{m}$ à $\mathfrak{n}$ sur le contour, des dédoublements du segment dont il s'agit forment de nouveaux contours, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, dont les angles internes sont ceux du proposé, sauf en $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ où ils ne sont que des parties des derniers de tels sommets, angles par là tous saillants. Ces deux contours sont donc convexes aussi, et, comme la droite $\mathfrak{D}$ frôle chacun d'eux en un côté, $[\mathfrak{mn}]$, elle ne les aborde plus ailleurs (2°). Ses traversées $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ avec le proposé ne sont donc accompagnées d'aucune troisième.

III. 1° *Dans le cas* (II, 2°), *la droite* $\mathfrak{D}$ *laisse d'un même côté d'elle tous les points du contour étrangers au frôlement* $[qr]$, *tous ceux de son internat par suite* (7, V, 1°).

Soient $[q\mathfrak{p}]$, $[r\mathfrak{s}]$ les côtés du contour faisant amorces pour le frôlement, et $\mathfrak{pon}\ldots\mathfrak{s}$ sa partie laissée par l'ablation de ces trois côtés $[\mathfrak{p}q]$, $[qr]$, $[r\mathfrak{s}]$.

Pour un tel abord, les amorces considérées sont enchaînées (3, IV, 3°), placées ainsi dans un même demi-plan d'arête $\mathfrak{D}$ (*Ibid.*, II, 3°). Le côté $[\mathfrak{po}]$ contigu est donc tel, tout entier, parce qu'il en est ainsi pour son extrémité $\mathfrak{p}$ et qu'il n'aborde pas cette arête (II, 2°). Puis semblablement, pour $[\mathfrak{on}]$, $[\mathfrak{nm}]$, ..., jusqu'à $[\mathfrak{rs}]$.

2° Dans le cas (II, 4°), nous avons constaté incidemment que la diagonale $[\mathfrak{mn}]$ (essentielle ou facultative) est toujours tracée dans l'intérieur du contour, et qu'elle découpe celui-ci en deux parties formant avec elle deux autres contours convexes aussi. Cette observation réduit à quelques mots la démonstration du théorème du n° 10, appliqué à un contour convexe.

IV. *Quand un contour* $\mathfrak{K}$ *n'est pas convexe, cas auquel il possède quelque angle interne ren-*

trant $\mathfrak{r}_i$, *chacune des droites qui contiennent les côtés de cet angle l'aborde dans des conditions qui contredisent à la fois les deux parties du dispositif de l'énoncé de l'alinéa* II. *Et chacune, encore, laisse, de part et d'autre d'elle, quelques points du contour.*

1° Soient [$\mathfrak{rq}$], [$\mathfrak{rs}$] les deux côtés du contour qui se soudent en $\mathfrak{r}$. Comme l'angle $\mathfrak{r}_i$ est rentrant, il contient dans son intérieur la demi-droite opposée à son côté $\overline{\mathfrak{rq}}$, et, parce qu'il est interne, cette demi-droite présente avec le contour une traversée au moins (7, V). Si donc [$\mathfrak{qr}$] est un frôlement, il est accompagné de cet autre abord. S'il est une traversée, celle-ci ne se réduit pas à un seul point.

2° Soient enfin [ij] le second abord de nos lignes, une traversée pouvant se réduire à un point, dont l'existence vient d'être constatée (1°), et [$i\mathfrak{h}$], [$j\mathfrak{k}$] ses amorces sur $\mathfrak{K}$. Comme les angles de $\mathfrak{D}$ auxquels celles-ci sont intérieures sont déchaînés et consistent en des demi-plans d'arête commune $\mathfrak{D}$, ces derniers sont mutuellement opposés, ceci plaçant les sommets $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ de part et d'autre de cette droite.

V. *Un contour est convexe quand la droite de chaque côté laisse d'un même côté d'elle tous les sommets étrangers à ce côté, ou bien encore, quand les traversées de toute droite se réduisent à deux points.*

Car, s'il ne l'était pas, la droite de quelque côté laisserait, de part et d'autre d'elle, deux sommets au moins (IV); en même temps, elle traverserait le contour autrement qu'en deux points (*Ibid.*).

De ces deux propriétés des contours convexes, c'est tantôt l'une qui est prise pour définition, tantôt l'autre, la seconde plus rarement et moins commodément aussi.

Celle dont nous sommes partis semble préférable, soit parce qu'elle est liée bien plus étroitement aux notions vulgaires de convexité, de concavité, soit parce qu'elle est la plus facile à reconnaître.

VI. *Pour tout nombre* N *de côtés, il existe une infinité de contours convexes.*

S'il en existe un de N — 1 côtés, la jonction de deux points $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, pris arbitrairement dans les intérieurs de deux côtés soudés en un sommet essentiel, conduit visiblement à un triangle et à un contour convexe de N côtés (III, 2°). Or, notre proposition a lieu pour $N = 3$, puisque dans tout triangle les angles internes sont saillants (4, I, 1°).

[K¹13cα]

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DU TÉTRAÈDRE;

PAR M. G. FONTENÉ.

THÉORÈME. — *Le contact de la deuxième sphère des douze points d'un tétraèdre orthocentrique avec une sphère inscrite ou exinscrite est une condition simple qui se traduit par une condition double dans le cas d'un tétraèdre réel : le tétraèdre doit être une pyramide triangulaire régulière.*

Dans la première partie de ce Mémoire, j'établirai des formules relatives à un tétraèdre orthocentrique quelconque; dans la seconde partie, je démontrerai le théorème énoncé (*cf.* même Volume, p. 72).

I.

1. Soit un tétraèdre orthocentrique ABCD. Considérons une sphère tangente aux plans des quatre faces; le centre de cette sphère étant I, les points de contact avec les plans des faces étant K, L, M, N, prenons comme sens positifs sur les perpendiculaires à ces plans les sens KI, LI, MI, NI, ou les sens contraires, et soit

$$r = \overline{KI} = \overline{LI} = \overline{MI} = \overline{NI}.$$

Les pieds des hauteurs étant P, Q, R, S, soit

$$h = \overline{PA}, \qquad h' = \overline{QB}, \qquad h'' = \overline{RC}, \qquad h''' = \overline{SD}.$$

Prenons comme données les quantités

$$\overline{HA} = a, \qquad \overline{HB} = b, \qquad \overline{HC} = c, \qquad \overline{HD} = d.$$

2. On obtient facilement le rayon R de la sphère circonscrite. Si G est le barycentre des quatre sommets affectés de coefficients égaux, on a

$$\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \ldots = 4\overline{HG}^2 + \lambda^2,$$
$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \ldots = 4\overline{OG}^2 + \lambda^2;$$

G étant milieu de OH, on a HG = OG, d'où

$$(1) \qquad 4R^2 = \Sigma a^2, \qquad \text{ou} \qquad D^2 = \Sigma a^2.$$

3. Posons

$$\overline{HA} \times \overline{HP} = \overline{HB} \times \overline{HQ} = \overline{HC} \times \overline{HR} = \overline{HD} \times \overline{HS} = k,$$

et formons une équation qui donne k. On peut écrire

$$\overline{HA}(\overline{HA} - \overline{PA}) = k, \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{a^2 - k}{a},$$

et la relation

$$\sum \frac{\overline{PH}}{\overline{PA}} = 1, \qquad \text{ou} \qquad \sum \frac{h-a}{h} = 1,$$

donne l'équation en k

$$(2) \quad \sum \frac{1}{a^2-k} + \frac{1}{k} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{k}\left(\sum \frac{a^2}{a^2-k} - 3\right) = 0.$$

Ainsi k est donné par une équation du quatrième degré. Cette équation rendue entière est

$$3k^4 - 2k^3 \Sigma a^2 + k^2 \Sigma a^2 b^2 - a^2 b^2 c^2 d^2 = 0,$$

sans terme du premier degré en k.

4. Si l'on suppose

$$d^2 < a^2 < b^2 < c^2,$$

et, si l'on désigne par $f(k)$ le premier membre de l'équation (2), on a

k	$-\infty$		0		d^2		a^2		b^2		c^2		$+\infty$,
$f(k)$	$+\varepsilon$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$-\varepsilon$;

l'équation en k a donc une racine négative, une racine entre d^2 et a^2, une autre entre a^2 et b^2, une dernière entre b^2 et c^2.

La racine négative donne un tétraèdre pour lequel le point H est intérieur. Une racine positive donne un tétraèdre par lequel l'orthocentre est sur le prolongement d'une hauteur au delà du sommet correspondant : avec $d^2 < a^2, b^2, c^2$, l'orthocentre est sur le prolongement de SD au delà de D, et l'on a

$$d^2 < k < a^2, b^2, c^2;$$

la seule racine positive qui donne un tétraèdre réel est

donc la plus petite. *Ainsi, lorsqu'on se donne* a^2, b^2, c^2, d^2, *deux valeurs seulement de* k *sont acceptables.*

5. Les valeurs des quantités d^2, a^2, b^2, c^2 peuvent d'ailleurs être quelconques. En effet, prenons pour k l'une des deux valeurs moindres que a^2. Si l'on met en place la hauteur SD avec le point H, et si l'on mène le plan perpendiculaire à SD au point S, on peut placer le point A sur une droite menée dans ce plan par le point S, pourvu qu'on ait

$$|a| > \mathrm{SH}, \qquad \text{ou} \qquad |ad| > |k|;$$

or, si l'on substitue $\pm ad$ dans $f(k)$, il reste simplement

$$\frac{1}{b^2 \mp ad} + \frac{1}{c^2 \mp ad},$$

résultats positifs; la racine négative de l'équation en k est donc plus grande que $-|ad|$, la racine comprise entre d^2 et a^2 est plus petite que $|ad|$.

La droite qui doit porter BC est alors déterminée; elle rencontre le prolongement de AS en un point E tel que l'on a, avec des longueurs,

$$\mathrm{SE} \times \mathrm{SA} = \mathrm{SH} \times \mathrm{SD} = \pm \frac{k(d^2 - k)}{d^2},$$

ou, par élévation au carré,

$$\left(\mathrm{HE}^2 - \frac{k^2}{d^2}\right)\left(a^2 - \frac{k^2}{d^2}\right) = \frac{k^2(d^2 - k)^2}{d^4};$$

les points B et C existeront si chacune des longueurs $|b|$ et $|c|$ est plus grande que HE, c'est-à-dire si l'on a par exemple (puisque $a^2 d^2 - k^2$ est positif)

$$(b^2 d^2 - k^2)(a^2 d^2 - k^2) > k^2(d^2 - k)^2,$$

ou

$$2k^3 - (d^2 + a^2 + b^2)k^2 + d^2 a^2 b^2 > 0;$$

or, d'après l'équation en k, tant pour la valeur négative de k que pour la valeur comprise entre d^2 et a^2, le terme $\frac{1}{c^2 - k}$ étant positif, on a

$$\frac{1}{d^2 - k} - \frac{1}{a^2 - k} + \frac{1}{b^2 - k} + \frac{1}{k} < 0;$$

comme $a^2 - k$ et $b^2 - k$ sont positifs, comme on a de plus

$$k(d^2 - k) < 0,$$

on peut multiplier par le produit des dénominateurs en changeant le sens de l'inégalité, et l'on obtient précisément le résultat ci-dessus.

6. La formule connue

$$\frac{1}{r} = \sum \frac{1}{h}$$

donne alors

$$(3) \qquad \frac{1}{r} = \sum \frac{a}{a^2 - k}.$$

7. On aurait l'équation en r en éliminant k entre les relations (2) et (3). Nous procéderons d'une manière différente.

Considérons les quantités a, b, c, d comme les racines de l'équation

$$(4) \qquad x^4 - \alpha x^3 - \beta x^2 - \gamma x - \delta = 0.$$

On a d'abord

$$(5) \qquad D^2 = \alpha^2 - 2\beta;$$

l'équation en k devient

$$(6) \quad 3k^4 - 2(\alpha^2 - 2\beta)k^3 - (\beta^2 - 2\alpha\gamma - 2\delta)k^2 - \delta^2 = 0.$$

8. Au point de vue de l'élimination de k entre les

relations (2) et (3), nous transformerons ces relations comme il suit. En ce qui concerne la relation (2), nous formerons la transformée en $y = x^2 - k$ de l'équation (4), et nous écrirons que la somme des inverses des racines est égale à $-\frac{1}{k}$; on est conduit à poser

$$\begin{aligned} k^2 + \beta k + \delta &= kP, \\ \alpha k + \gamma &= N, \\ 2k + \beta &= M, \end{aligned}$$

et l'on obtient

$$P^2 - 2MP + 2\alpha N = 0. \tag{7}$$

En ce qui concerne la relation (3), nous formerons la transformée en $y = \frac{x^2 - k}{x}$ de l'équation (4), et nous écrirons que la somme des inverses des racines est $\frac{1}{r}$; on est conduit, pour faire l'équation en y, à éliminer x entre les deux équations

$$\begin{gathered} (y^2 - \alpha y)x^2 + (My - N)x + kP = 0, \\ x^2 - yx - k = 0, \end{gathered}$$

et l'on trouve finalement

$$kP^2 - rNP - N^2 - 2\alpha krP + 2rMN = 0. \tag{8}$$

9. M. G. Lery m'a donné l'idée de résoudre les relations (7) et (8) par rapport aux quantités N et P. On a d'abord la solution $N = 0$, $P = 0$, qui donnerait

$$k^2 + \beta k + \delta = 0. \qquad \alpha k + \gamma = 0;$$

l'élimination de k fournirait une relation entre a, b, c, d, tandis que ces quantités ont été supposées quelconques. Cette solution écartée, si l'on forme la combinaison homogène en N et P,

$$\frac{kP^2 - rNP - N^2}{P^2} = \frac{\alpha krP - rMN}{MP - \alpha N},$$

cette relation prend la forme remarquable

$$(kP^2 - N^2)(MP - \alpha N) = \alpha r P(kP^2 - N^2).$$

Pour $kP^2 = N^2$, l'équation en x admettrait la solution $x = \sqrt{k}$; on aurait alors, par exemple,

$$\overline{HA}^2 = k = \overline{HA} \times \overline{HP} \quad \text{ou} \quad \overline{HA} = \overline{HP},$$

ce qui est inadmissible. Cela suppose d'ailleurs $a^2 = b^2$, ou c^2, ou d^2.

On doit donc prendre

$$MP - \alpha N = \alpha r P;$$

la relation (7) donne alors

$$P = 2\alpha r,$$

et la relation (8), réduite à trois termes, donne

$$N = 2r(M - \alpha r);$$

on a finalement

$$(9) \qquad k^2 + \beta k + \delta = 2\alpha k r,$$

$$(10) \qquad k(4r - \alpha) = 2\alpha r^2 - 2\beta r + \gamma.$$

L'élimination de k est alors aisée, et l'on a l'équation en r

$$(11) \qquad (2\alpha r^2 - 2\beta r + \gamma)^2 + (\beta - 2\alpha r)(4r - \alpha)(2\alpha r^2 - 2\beta r + \gamma) + \delta(4r - \alpha)^2 = 0$$

ou

$$(12) \qquad -(2\alpha r^2 - 2\beta r + \gamma)[6\alpha r^2 - 2(\alpha^2 + \beta)r + (\alpha\beta - \gamma)] + \delta(4r - \alpha)^2 = 0.$$

10. Quand on se donne a^2, b^2, c^2, d^2, c'est-à-dire quand on se donne les longueurs HA, HB, ..., on obtient, comme on l'a vu, deux tétraèdres réels, l'un pour

lequel le point H est intérieur, l'autre pour lequel le point H est extérieur. Pour chacun de ces tétraèdres, on obtient les rayons des sphères tangentes aux quatre faces en appliquant la formule (9), avec des signes convenables pour a, b, c, d.

II.

11. *La deuxième sphère des douze points d'un tétraèdre orthocentrique peut-elle être tangente à une sphère inscrite ou exinscrite?*

Le contact aura lieu si l'on a (p. 71)

$$\overline{OI}^2 = (R \mp 3r)(R \pm r) = R^2 \mp 2Rr - 3r^2,$$

O étant le centre de la sphère circonscrite; or on a, comme à la page 83,

$$R^2 - \overline{OI}^2 = r \times (\Sigma a - 3r);$$

la condition du contact est donc

$$\pm 2R + 3r = \Sigma a - 3r,$$

ou

$$(13) \qquad 6r = \alpha \mp D.$$

12. L'une des racines de l'équation en r, correspondant à une valeur de k acceptable ou non, vérifiera cette relation si l'on a, en mettant D pour $\pm$ D,

$$\begin{aligned}&[\alpha(\alpha - D)^2 - 6\beta(\alpha - D) + 18\gamma]\\ &\times [\alpha(\alpha - D)^2 - 2(\alpha^2 + \beta)(\alpha - D) + 6(\alpha\beta - \gamma)]\\ &\qquad - 3\delta[4(\alpha - D) - 6\alpha]^2 = 0;\end{aligned}$$

en tenant compte de la valeur de D^2 pour chaque crochet, cela donne

$$\begin{aligned}&[(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 9\gamma) - (\alpha^2 - 3\beta)D][(\alpha\beta - 3\gamma) + \beta D]\\ &\qquad - 3\delta[(5\alpha^2 - 8\beta) + 4\alpha D] = 0;\end{aligned}$$

on trouve, en achevant le calcul, et en rétablissant le double signe,

$$\alpha^2\beta^2 - 6\beta^3 + 21\alpha\beta\gamma - 3\alpha^3\gamma - 27\gamma^2 - 3\delta(5\alpha^2 - 8\beta)$$
$$= \pm\alpha(\beta^2 - 3\alpha\gamma + 12\delta)\sqrt{\alpha^2 - 2\beta}.$$

13. Pour reconnaître les invariants S et T d'un polynome de quatrième degré, nous prendrons maintenant l'équation qui donne les valeurs des quantités $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, ..., sous la forme

$$(14) \qquad ax^4 - 4bx^3 + 6cx^2 - 4dx + e = 0;$$

les racines de cette équation sont aussi désignées par a, b, c, d, mais il n'y a à craindre aucune confusion. On a alors

$$\alpha = \frac{4b}{a}, \qquad \beta = \frac{6c}{a}, \qquad \gamma = \frac{4d}{a}, \qquad \delta = \frac{e}{a},$$

et la relation précédente prend la forme

$$12b^2c^2 - 27ac^3 + 42abcd - 16b^3d - 9a^2d^2 - ae(5b^2 - 3ac)$$
$$= \pm\varepsilon \times 2b(ae - 4bd + 3c^2)\sqrt{4b^2 - 3ac},$$

ε étant le signe de a.

Or les invariants S et T sont

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

et nous considérerons encore les quantités bien connues

$$V = b^2 - ac, \qquad U = 3aT + 2VS.$$

Si, du premier membre de la relation écrite plus haut, on retranche 3U, il reste $-2b^2S$; cette relation peut donc s'écrire

$$(15) \qquad 3U - 2b^2S = \pm\varepsilon \times 2bS\sqrt{b^2 + 3V}.$$

ou, sous forme rationnelle,

$$9U^2 - 12b^2SU - 12b^2VS^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(16) \qquad 3U^2 - 4b^2S(U + VS) = 0.$$

On peut encore écrire

$$U^2 - 4b^2S(aT + VS) = 0$$

ou

$$U^2 - 2b^2S(U - aT) = 0.$$

Si l'on remplace U par $3aT + 2VS$, on voit que a est en facteur; ce fait s'explique aisément.

14. La relation (16) est satisfaite si l'on a $S = 0$, $T = 0$; trois des quantités a, b, c, d sont alors égales, et l'on a une pyramide triangulaire régulière. Nous écarterons ce cas, qui est sans intérêt.

15. En supposant, pour simplifier l'écriture, que le premier coefficient de l'équation (14) est égal à 1, la relation (16) contient seulement S, T, V, et b ou $\frac{\alpha}{4}$. On a d'ailleurs

$$V = \frac{1}{48}\sum(a - b)^2,$$

de sorte que V, aussi bien que S et T, ne dépend que des différences des racines.

Si l'on se donne les valeurs des différences $a - d$, $b - d$, $c - d$, les valeurs des quantités S, V, T sont déterminées, et la relation (16), dans laquelle U, V, S sont positifs (*voir* plus loin) fait connaître la valeur de la somme $a + b + c + d$, ou

$$(a - d) + (b - d) + (c - d) + 4d;$$

cette relation détermine donc d, et, par suite, a, b, c,

La question est de savoir si la valeur correspondante de k est acceptable, c'est-à-dire si cette valeur est négative, ou comprise entre d^2 et a^2, en supposant

$$d^2 < a^2 < b^2 < c^2.$$

16. La relation (15) exprime qu'on a

$$3U - 2b^2S \mp bS \times aD = 0,$$

le double signe correspondant à celui de la formule

$$6r = \alpha \mp D = \frac{4b \mp aD}{a};$$

si l'on écrit

$$3(U - 2b^2S) + bS(4b \mp aD) = 0,$$

on a donc, en divisant par 3, la formule

$$(17) \qquad (U - 2b^2S) + 2abrS = 0$$

qui fait connaître r. Comme la relation sous forme rationnelle peut s'écrire

$$U(U - 2b^2S) + 2ab^2ST = 0,$$

on aurait encore

$$r = \frac{bT}{U};$$

mais nous emploierons la valeur de r donnée par la relation (17).

On peut écrire

$$(18) \qquad U = 2bS(b - ar).$$

17. En remplaçant b par $\frac{\alpha}{4}$, avec $a = 1$, on a donc

$$r = \frac{\alpha^2S - 8U}{4\alpha S},$$

$$\alpha - 4r = \frac{8U}{\alpha S}.$$

On a d'ailleurs

$$S = \frac{1}{24}\sum(a-b)^2(c-d)^2 = \frac{A}{24},$$

$$8U = \frac{1}{24}\sum(b-c)^2(c-d)^2(d-b)^2 = \frac{B}{24};$$

l'expression de U résulte de ceci : le polynome $ax^4 + 4bx^3 + \ldots$ étant désigné par F, et son hessien étant H, la quantité U, ou $3aT - 2(ac - b^2)S$, est le coefficient de x^4 dans le covariant $3TF - 2SH$; or ce covariant est, avec $a = 1$,

$$\frac{1}{192}\sum(b-c)^2(c-d)^2(d-b)^2(x-a)^4;$$

voir Salmon, *Leçons d'Algèbre supérieure*. On voit que U est positif, comme on l'a dit.

On a ainsi

$$r = \frac{\alpha^2 A - B}{4\alpha A}, \tag{19}$$

$$\alpha - 4r = \frac{B}{\alpha A}. \tag{20}$$

La relation (10) donne alors

$$k = \frac{-(\alpha^2 A - B)^2 + 4\beta A(\alpha^2 A - B) - 8\alpha\gamma A^2}{8AB}. \tag{21}$$

18. Lorsque deux des quantités a, b, c, d sont égales, soit $a = b$ (sans rien supposer ici sur la grandeur relative des quantités a^2, c^2, d^2), l'équation en k admet la racine a^2; cette racine est d'ailleurs inadmissible, car on ne peut avoir, comme on l'a déjà dit,

$$\overline{HA}^2 = \overline{HA} \times \overline{HP}.$$

Or on a alors

$$A = 2(a-c)^2(a-d)^2,$$
$$B = 2(a-c)^2(a-d)^2(c-d)^2,$$

d'où

$$\alpha - 4r = \frac{(c-d)^2}{\alpha},$$

$$r = \frac{(a-c)(a+d)}{\alpha};$$

la relation (10) donne ensuite

$$k = a^2,$$

et ce résultat s'obtiendrait, en conséquence, par la formule (21). On voit que la valeur obtenue pour k est précisément une valeur inadmissible.

La formule $r = \frac{bT}{t}$ *n'aurait pas conduit au résultat sans tenir compte de la relation* (16); en tenir compte, ce serait revenir à la relation (17) ou (18) qu'on vient d'utiliser.

19. Ainsi la relation (21) donne directement, *c'est-à-dire sans intervention de la condition* (16) *qui lie* a, b, c, d,

$$k = a^2 \quad \text{pour} \quad a = b,\ c,\ \text{ou}\ d,$$
$$k = b^2 \quad \text{pour} \quad b = a,\ c,\ \text{ou}\ d,$$

etc. Le numérateur est du douzième degré par rapport à l'ensemble des quantités a, b, c, d; il est du sixième degré en a, par exemple, le terme du quatrième degré en a dans $\alpha^2 A - B$ disparaissant. On est ainsi conduit à prévoir la formule

$$(22)\quad k = \frac{16(a-b)^2(a-c)^2\ldots(c-d)^2\left[\sum \frac{a^2-b^2}{a-b^2} - 1\right]}{8AB},$$

qui, pour $a = b$ par exemple, donne bien $k = a^2$. J'ai d'abord écrit, dans le crochet,

$$\sum \frac{\lambda(a^2-b^2) - 2\mu ab}{(a-b)^2} + \theta;$$

en remplaçant $2ab$ par $(a^2+b^2)-(a-b)^2$, j'ai écrit ensuite

$$\sum \frac{\lambda'(a^2+b^2)}{(a-b)^2}+\theta';$$

il faut faire alors $\lambda'=1$ pour trouver $k=a^2$ dans l'hypothèse $a=b$. Je reviendrai sur la valeur de θ'.

20. Pour vérifier la formule (22), il faut vérifier que le numérateur est égal à celui de la formule (21). Comme ces numérateurs sont du sixième degré en a, il suffit de montrer qu'ils sont égaux par les trois valeurs

$$a=b,\ c,\quad \text{ou}\quad d,$$

que leurs dérivées, par rapport à a, sont égales pour ces mêmes valeurs, enfin que les coefficients de a^6 sont égaux. Le premier fait résulte de ce qu'on a dit au n° 18; j'ai vérifié le second pour $a=b$; la comparaison des coefficients de a^6 donne $\theta'=-1$.

21. Il reste à montrer que la valeur de k n'est pas acceptable, c'est-à-dire qu'elle n'est pas négative, ni comprise entre d^2 et a^2.

On voit aisément que cette valeur est positive. En effet, deux au moins des quatre quantités a, b, c, d sont de même signe; s'il en est ainsi pour a et b, par exemple, la fraction $\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$ est plus grande que 1, et k est positif.

22. En cherchant à comparer la valeur de k aux quantités d^2, a^2, b^2 et c^2, j'ai été conduit à remarquer l'identité

$$(23)\quad A\times B=4(a-b)^2(a-c)^2\ldots(c-d)^2\sum\frac{1}{(a-b)^2}.$$

L'égalité a lieu pour chacune des hypothèses

$$a = b, \quad a = c, \quad \ldots, \quad a + d = b + c, \quad \ldots, \quad \ldots;$$

si le polynome

$$A \times B - 4(a-b)^2(a-c)^2 \ldots \sum \frac{1}{(a-b)^2},$$

qui est du degré 10, n'était pas identiquement nul, il serait donc divisible par le produit

$$(a-b)(a-c)\ldots(a+d-b-c)\ldots,$$

qui est du degré 9; le quotient serait de la forme

$$(a+b+c+d) \times \text{const.};$$

mais alors le polynome serait du septième degré en a, tandis qu'il est seulement du degré 6. On a donc l'identité (23), et la valeur de k prend la forme

$$(24) \qquad k = \frac{\sum \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} - 1}{2\sum \frac{1}{(a-b)^2}}.$$

Pour $a = b$, cela donne bien $k = a^2$.

23. Il serait, je crois, assez difficile de montrer directement que cette valeur de k est plus grande que a^2, dans l'hypothèse

$$d^2 < a^2 < b^2 < c^2;$$

peut-être même faudrait-il tenir compte de la relation (16) qui lie a, b, c, d, bien que le fait se soit montré exact sur un assez grand nombre d'exemples numériques où a, b, c, d étaient quelconques.

Mais on peut regarder la relation (24) comme la condition que doit remplir le tétraèdre orthocentrique,

interpréter cette condition géométriquement, montrer qu'elle est impossible avec un tétraèdre *réel*. Il suffit pour cela d'écrire

$$\sum \frac{a^2 + b^2 - 2k}{(a-b)^2} = 1;$$

comme on a

$$a^2 + b^2 - 2k = \overline{AB}^2,$$

la condition est

$$\sum \frac{\overline{AB}^2}{(a-b)^2} = 1. \tag{25}$$

Or, si a et b, par exemple, sont de même signe, la fraction $\frac{\overline{AB}^2}{(a-b)^2}$ est plus grande que 1, de sorte que la condition (25) ne peut avoir lieu. Le théorème est ainsi démontré.

On a toutefois supposé que deux des quantités a, b, c, d ne sont pas égales. Pour $a = b$, la relation (25) est satisfaite si l'on a

$$a = b = c \quad \text{ou} \quad d, \qquad \text{ou bien} \qquad a = c, \qquad b = d;$$

on a écarté le premier cas. Dans le second cas, il faut revenir à la condition (16); on a alors $U = 0$, mais S et V sont différents de zéro, de sorte qu'on devrait avoir $a + b + c + d = 0$, ou $a = c = -b = -d$; cette hypothèse n'est pas admissible.

III.

24. Dans le cas particulier où l'on a

$$d = 0,$$

l'équation du quatrième degré en k a une racine double égale à zéro, une racine entre a^2 et b^2, une autre entre

b^2 et c^2; la première seule donne un tétraèdre réel avec un trièdre trirectangle en D. L'équation (12) se décompose alors, δ étant nul; le premier facteur donne deux valeurs de r relatives au tétraèdre à trièdre trirectangle; le second facteur donne deux valeurs de r relatives aux deux tétraèdres imaginaires.

La condition de contact

$$6r = \alpha \mp D$$

donne alors directement

$$[(\alpha\beta - 9\gamma)^2 - 6(\alpha^2 - 3\beta)(\beta^2 - 3\alpha\gamma)] \\ \times [2\beta(\beta^2 - 3\alpha\gamma) + 9\gamma^2] = 0,$$

a, b, c étant racines de l'équation

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0;$$

le premier facteur ne peut être nul, sauf dans l'hypothèse $a = b = c$ qu'on écarte; le second facteur n'est pas à considérer. Naturellement, la valeur de k fournie par la formule (24) n'est pas la valeur zéro.

Nota. — Le théorème établi ici est un exemple d'une *condition simple* donnant lieu à *deux conditions*, en raison de l'obligation que l'on impose à la figure d'être *réelle*.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2110.

(1908, p. 480.)

Soit sur une ellipse un point M *d'où l'on peut mener à la courbe les normales* MA, MB, MC. *Soit* γ *le point de*

rencontre de AB *et de la parallèle menée de* M *à la tangente au point* C. *On a de même sur* AC *et* BC *les points* β. *et* α. *Les points* α, β. γ *sont sur une même droite parallèle à la tangente au point* M *à l'ellipse.* (CANON.)

SOLUTION,

Par M. G. PÉLISSIER.

Si nous transformons la figure par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre M, la propriété à démontrer devient la suivante : Soient α, β. γ les pieds des normales menées d'un point intérieur ω à une parabole P et ABC le triangle formé par les tangentes aux points α, β, γ; les perpendiculaires menées des points A, B, C respectivement sur BC, CA, AB concourent en un point H qui est sur le diamètre de P, passant par ω. La première partie de la proposition est évidente, les trois droites considérées étant les hauteurs du triangle ABC; démontrons la seconde partie.

Rapportant la parabole à son axe et à sa tangente au sommet, soient x_0, y_0 les coordonnées de C, point de rencontre des tangentes en α, β. La droite αβ a pour équation

$$yy_0 - px - px_0 = 0,$$

et les ordonnées des points α, β sont racines de l'équation

$$(1) \qquad y^2 - 2yy_0 + 2px_0 = 0.$$

L'ordonnée de γ sera donc, d'après une propriété connue, $-2y_0$, et la tangente à γ, ou BC, aura pour équation

$$px + 2yy_0 + 2y_0^2 = 0.$$

Le point H se trouve sur la perpendiculaire menée de C à cette droite, c'est-à-dire, sur

$$(2) \qquad p(y - y_0) - 2y_0(x - x_0) = 0,$$

et, d'autre part, sur la directrice de P

$$(3) \qquad x - \frac{p}{2} = 0.$$

Cherchons les coordonnées x, y du point ω. Pour cela il

n'y a qu'à exprimer que l'équation aux ordonnées des pieds des normales menées par ω, qui est

$$y^2 - 2py(x_1 - p) - 2p^2 y_1 = 0,$$

admet pour racines $-2y_0$ et les racines de (1). On trouve aisément, pour valeur de y_1, $-\frac{2x_0 y_0}{p}$. Le diamètre de P passant par ω a donc pour équation

$$(4) \qquad y + \frac{2x_0 y_0}{p} = 0.$$

Les trois équations (2), (3), (4) étant compatibles en xy, la proposition que nous avions en vue est démontrée.

Autres solutions par MM. Barisien et Bouvaist.

2112.

(1908, p. 528.)

Les centres de courbure de l'ellipse les plus rapprochés du centre de la courbe sont ceux qui répondent aux points où la tangente fait le plus grand angle avec la tangente correspondante du cercle principal. (d'Ocagne.)

SOLUTION,

Par M. R. Bouvaist.

Soient MT la tangente à l'ellipse, M'T la tangente correspondante au cercle principal, NMI la normale à l'ellipse, N le pied de cette normale, OMI le rayon du cercle principal.

On sait qu'on a

$$OI = a + b,$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse.

Soit D la distance de O à MN,

$$\sin \widehat{MTM'} = \sin \widehat{OIN} = \frac{D}{a+b},$$

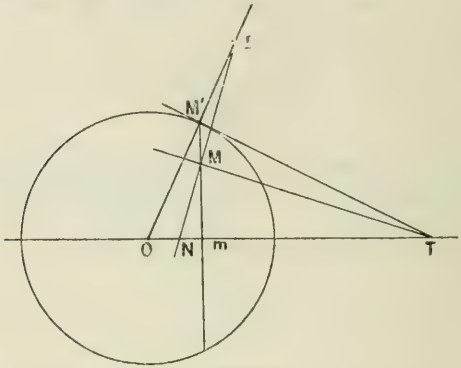
donc $\widehat{MTM'}$ sera maximum avec D.

Or les normales à l'ellipse les plus éloignées du centre de la courbe correspondent aux points d'incidence des normales

à la développée issues du centre de cette courbe : en effet, si une normale à l'ellipse est

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p(\varphi), \qquad D = p(\varphi);$$

donc D sera maximum pour $p'(\varphi) = 0$ ou pour une normale à la développée passant par le centre de la courbe.



Si maintenant nous considérons l'équation de la développée sous la forme

$$\rho = f(\omega),$$

nous voyons que ρ sera minimum pour $\rho' = 0$, c'est-à-dire pour une normale à la développée passant par le centre de la courbe.

Autre solution par M. Barisien.

2113.

(1908, p. 528.)

Soit M *le milieu du côté* AB *du carré* ABCD. *Si par le sommet* D *on mène une droite quelconque qui coupe le côté* BC *en* P *et la droite* CM *en* Q, *les angles* BAP *et* DBQ *sont égaux.* (M. d'Ocagne.)

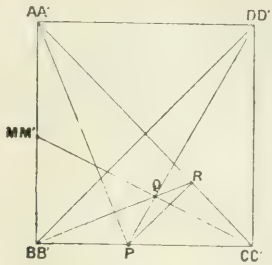
SOLUTION,

Par M. R. B.

Considérons le carré ABCD comme étant la base d'un cube. Soient A', B', C', D' les sommets de ce cube, non situés dans

le plan de la figure. Soient M′ le centre, projeté en M, de la face ABB′A′ et Q′ le point de CM′ qui est projeté en Q.

La droite D′Q′ est située dans le plan (A′D′CM′), plan



dont la trace sur le plan de la figure est BC. P est donc la trace de la droite D′Q′.

La droite B′Q′ est située dans le plan (B′M′C′), plan dont la trace est AC. La trace de la droite B′Q′ est donc le point R où BQ rencontre AC.

Il résulte de là que PR est la trace du plan (BD′Q′), et que par suite PR est parallèle à B′D′ ou à BD.

On a donc

$$\widehat{RPC} = \widehat{DBC} = 45^\circ = \widehat{RAB}.$$

Par suite le quadrilatère ABPR est inscriptible et l'on a

$$\widehat{BAP} = \widehat{BRP} = \widehat{QBD}.$$

C. Q. F. D.

Autres solutions par MM. Barisien, Bouvaist, Lez, Retali.

2119.

(1909, p. 100.)

Lorsqu'une courbe (C) *roule sur une droite, le symétrique, par rapport au point de contact* P *de la courbe avec la droite à un instant, du centre de courbure de la roulette décrite par un point* M, *invariablement lié à la courbe, se trouve sur la polaire de* M *par rapport au cercle osculateur de* (C) *au point* P. (A. Pellet.)

SOLUTION,

Par M. F. Boulad.

Appelons O le centre du cercle osculateur, μ le centre de courbure répondant au point M, et K le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur PM. Soient Q et α les points de rencontre respectifs de MO et MP avec la polaire du point M par rapport à ce cercle, N et T les points où ce dernier coupe respectivement MP et $Q\alpha$.

Élevons en P une perpendiculaire à PM jusqu'à sa rencontre en un point S de OM; tirons $S\alpha$, ON et les deux parallèles OP et $S\mu$ en vertu de la construction de Savary relative à μ.

La tangente MT au cercle et la similitude des deux triangles αQM et OKM donnent

$$MN.MP = \overline{MT}^2 = MQ.MO = M\alpha.MK;$$

d'où

$$\frac{MN}{M\alpha} = \frac{MK}{MP} = \frac{MO}{MS},$$

ce qui montre que NO est parallèle à αS. Mais comme OP est aussi parallèle à $S\mu$, et comme

$$ON = OP,$$

il en résulte que le triangle $\mu S\alpha$ est isoscèle. Donc

$$P\alpha = P\mu.$$

Autres solutions par MM. Amblard, Duby, Giraudon, P. de Lépinay.

QUESTION.

2142. — Si un cône du second ordre est circonscrit à un tétraèdre, tout plan passant par le sommet du cône coupe celui-ci et les quatre faces du tétraèdre suivant six droites tangentes à une conique.

(Thié.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME IX, 4e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

A. — Algèbre élémentaire; théorie des équations algébriques et transcendantes; groupes de Galois; fractions rationnelles; interpolation.

Pages.

A3d De l'usage pratique du théorème de Sturm; par M. *R. de Montessus*..... 235

A3g Sur la résolution des équations numériques; par M. *L. Zoretti*..... 354

A3h Sur la transformation de l'équation du troisième degré en elle-même; par M. *R. Alezais*..... 341

C. — Principes du Calcul différentiel et intégral; applications analytiques; quadratures; intégrales multiples; déterminants fonctionnels; formes différentielles; opérateurs différentiels.

C2j Sur certaines quadratures; par M. *G. Fontené*. 289

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant, en particulier, les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.

D1a Théorèmes sur les limites; par M. *L. Desaint*.. 510

H. — Équations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionnelles: équations aux différences finies: suites récurrentes.

Pages.

H11c Une définition fonctionnelle des polynomes; par M. *Maurice Fréchet*..... 145

I. — Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

I11a Note au sujet d'un article de M. S. Cervera; par M. *C.-A. Laisant*..... 135

K. — Géométrie et Trigonométrie; géométrie analytique; géométrie projective et descriptive; perspective.

K et K3a Les questions de sens en Géométrie; par M. *L. Zoretti*..... 385

K9a Sur les lignes brisées et les aires polygonales dans le plan, à propos de la décomposition d'un polygone en triangles; par M. *Ch. Méray*..... 481, 529

K¹13cα Contribution à la théorie du tétraèdre; par M. *G. Fontene*..... 57, 555

K¹10c Sur la longueur de la circonférence; par *L.-A. Paillard*..... 451

L. — Coniques, quadriques et variétés du second degré.

L¹16a Quelques théorèmes de géométrie projective relatifs à des triangles et à des coniques; par M. *Maurice Fouché*..... 1

L²10a Note sur une propriété des quadriques homofocales; par M. *M.-F. Egan*..... 126

L²21c Sur les quadriques circonscrites à deux sphères; par M. *R. Bricard*..... 128

L²21c Note sur les quadriques circonscrites à deux sphères; par M. *M.-F. Egan*..... 518

M. — Courbes, surfaces et variétés algébriques; courbes, surfaces et variétés transcendantes spéciales.

M²1b Sur les surfaces possédant une droite multiple; par M. *Lucien Godeaux*..... 162

N. — Complexes et congruences; connexes, systèmes de courbes, de surfaces et de variétés; géométrie énumérative.

Pages.

N¹1k Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire; par M. *E. Keraval*.. 35

N²3a Sur un complexe bilinéaire de coniques; par M. *Lucien Godeaux*..... 312

N²3b Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches; par M. *Lucien Godeaux*.. 260

O. — Géométrie infinitésimale et géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes; lignes asymptotiques, géodésiques, lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

O¹2kβ Sur certains systèmes orthogonaux du plan et sur les surfaces intégrales de l'équation de Laplace $r + t = 0$; par M. *Émile Turrière*.. 87

O¹3g Étude sur les enveloppes de courbes à un paramètre: par M. *Barré*..... 101

O¹5f Sur un théorème analogue au théorème de Meusnier; par M. *B. Hostinsky*..... 399

O¹5iα Sur les surfaces de Monge et sur la composition de Calcul différentiel et intégral du concours d'agrégation (1908); par M. *Émile Turrière*.. 294

O¹5j Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures; par M. *A. Buhl*..... 337

O¹5n Une application géométrique de la série considérée par Airy dans la diffraction des ouvertures circulaires; par M. *Émile Turrière*.... 433

O¹6o Sur les trajectoires orthogonales de certaines surfaces et sur les intégrales homogènes de l'équation de Laplace; par M. *Émile Turrière*..... 396

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelles et autres.

P¹6f Sur une transformation de droites; par M. *Émile Turrière*..... 249

Q. — Géométries diverses: généralités sur la géométrie à *n* dimensions; géométrie non euclidienne; *analysis situs;* géométrie de situation.

Pages.

Q3a Notions élémentaires sur la géométrie descriptive de situation; par M. *J. Hadamard*..... 193

R. — Mécanique générale; cinématique; statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; dynamique; mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

R1b Théorème sur la rotation d'une plaque plane dans son plan; par M. *A. Rogoff*..... 266

R8c Sur le mouvement d'une chaîne pesante sur une courbe fixe; par M. *A. Myller*..... 317

T. — Physique mathématique; élasticité; résistance des matériaux; capillarité; lumière; chaleur; électricité.

T4c Sur la conduction thermique; par M. *Émile Turrière*..... 258

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Calcul différentiel et intégral..... 327, 380
Analyse supérieure..... 469
Astronomie..... 50, 98, 281, 467
Mathématiques générales..... 177, 243

Questions de concours.

Agrégation des Sciences mathématiques (1908). Solution de la composition sur le Calcul différentiel et intégral, par M. *G. Clapier*..... 167
Agrégation des Sciences mathématiques (1908). Composition de Mécanique; solution, par *un Correspondant*..... 268
Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1909. Composition de Géométrie analytique et Mécanique; solution, par M. *Philbert du Plessis*..... 361
Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1909. Composition d'Algèbre et Trigonométrie; solution, par M. *Jean Servais*..... 372

Pages.

Concours d'admission à l'École Normale et aux bourses de licence en 1909; solutions, par M. *Jean Servais* 404
Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1909 (sujets des compositions) 426
Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1909 (Mathématiques élémentaires); solution, par *un Anonyme*. 455

Correspondance.

M. d'Ocagne : Sur une formule de cubature 50
M. H. Brocard : Au sujet d'un article de M. Deteuf 136
M. Lebesgue : Au sujet d'un article de M. G. Lery 136
M. J. Rose : Au sujet d'un article de M. Têtu 140
M. Retali : Au sujet de la question 2104 140
Un abonné : Sur une formule de Sylvester 175
M. H. Brocard : Au sujet d'un article de M. A. Padoa 243
M. E.-N. Barisien : Au sujet de la question 397 326
M. E. Turrière : Au sujet d'un article de M. E. Keraval et de la question 2122 377
M. Parrod : Au sujet de la question 2093 379
M. Hilaire : Au sujet d'une observation de M. Barisien 425
M. E.-N. Barisien : Sur une certaine courbe 425
M. Jan de Mézéas : Au sujet de la question 2101 523

Bibliographie.

René de Saussure : La Geometrio folietara; compte rendu par M. *R. Bricard* 422

Questions proposées.

2115 et 2116 56
2117 à 2120 100
2121 à 2125 142
2126 à 2129 192
2130 et 2131 248
2132 et 2133 288
2134 336
2135 à 2139 383
2140 486
2141 527
2142 576

Solutions de questions proposées.

656, par M. *G. Fontené* 475
2091, par MM. *G.-F. Letierce* 245

Pages.

2092, par M. *R. Bouvaist* 51
2093, par M. *Parrod* 52
2094, par M. *Farid Boulad* 54
2095, par M. *Têtu* 55
2097, par M. *G. Pélissier* 186
2098, par M. *R. Bouvaist* 477
2099, par M. *J. Rose* 141
2101, par MM. *G.-F. Jan de Mezéas* ..... 189 et 478
2102, par M. *Clapier* 190
2104, par M. *R. Bouvaist* 247
2105, par M. *J. Rose* 479
2106, par M. *G. Pélissier* 479
2107, par M. *G. Pélissier* 524
2109, par M. *R. Bouvaist* 526
2110, par M. *G. Pélissier* 571
2112, par M. *R. Bouvaist* 573
2113, par M. *R. B.* 574
2119, par M. *F. Boulad* 576
Errata 144, 288, 432

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS
(TOME IX, 4e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

Abel, 321.
UN ABONNÉ, 175.
Airy, 433.
R. ALEZAIS, 441.
R. Alezais, 258, 397.
Amblard, 576.
Ampère, 310.
UN ANONYME, 455.
Appell, 40, 254, 318, 441.
Aubry, 351.

E.-N. BARISIEN, 51, 141, 143, 248, 288, 326, 336, 384, 425, 479, 524.
E.-N. Barisien, 55, 191, 425, 527, 573, 574, 575.
BARRÉ, 101.
Beltrami, 58.
Bernoulli, 96.
Bertrand, 436.
Bessel, 435.
Betto, 55.
Bonnet, 254.
Bossut, 434.
H. Bouasse, 258, 308.
F. BOULAD, 54, 576.
BOUVAIST, 51, 247, 477, 526, 573.
Bouvaist, 53, 55, 60, 188, 191, 479, 480, 525, 573, 574.
R. BRICARD, 128, 574.
R. Bricard, 126, 256, 518.
Briot, 441.
H. BROCARD, 136, 243, 424.
H. Brocard, 327, 352.
Bros, 55.
Brown, 353.
A. BUHL, 337.

CANON, 526, 572.
G. Castelnuovo, 164.
Catalan, 140, 290.
Cauchy, 145, 235.
Cavalieri, 293.
Cayley, 262.
S. Cervera, 135.
CLAPIER, 143, 167, 190.
J. Clairin, 397.
M. COLLINS, 475.
UN CORRESPONDANT, 268.
Cotes, 290.
Cremona, 262.
G. CUNY, 192, 480.

Darboux, 379, 436.
L. DESAINT, 510.
Deteuf, 136.
Dittrich, 351.
Duby, 576.

Duporcq, 61.
H. Edler, 243.
M.-F. Egan, 126, 518.
F. Enriquès, 164.
Euler, 64, 211.

C. Faraggi, 188.
Faure, 61.
P. Favre, 188.
Feuerbach, 64.
Floquet, 378.
G. Fontené, 52, 55, 56, 57, 100, 186, 189, 245, 289, 384, 475, 478, 528, 555.
G. Fontené, 50.
M. Fouché, 1.
M. Fouché, 134.
Fouret, 162.
M. Fréchet, 145.
Fredholm, 318.
Fresnel, 308.

Gauss, 397, 438.
Gilbert, 477.
Giraudon, 576.
L. Godeaux, 162, 260, 312.
Goursat, 101, 233, 303, 341, 354.

J. Haag, 310.
J. Hadamard, 193.
J. Hadamard, 161, 385.
Haillecourt, 292.
Halphen, 378.
Halsted, 291.
Hermary, 84.
Hesse, 436.
Hilaire, 425.
Hilbert, 95.
Hill, 353.
G. Hilleret, 143.
B. Hostinsky, 399.
G. Humbert, 317.

Jacobi, 436.
Jamet, 92, 259.
Jan de Mézéas, 144, 189, 523.
Jerrard, 434.

Joachimsthal, 126.
Kepler, 290.
E. Keraval, 35.
E. Keraval, 342, 377.
Klein, 197, 307.
Kœhler, 52.
Koppe, 293.
Kummer, 435.

C.-A. Laisant, 135.
C.-A. Laisant, 136.
Laplace, 87, 258, 435.
H. Laurent, 94, 259.
Lebesgue, 136.
Lecornu, 436.
E. Lemoine, 136.
P. de Lépinay, 576.
G. Lery, 136, 560.
L. Lévy, 290.
Lez, 248, 279, 480, 527, 575.
S. Lie, 307.
Lobatto, 435.
G. de Longchamps, 425.
G. Loria, 262, 352.

Maclaurin, 292.
Maleyx, 291.
A. Mannheim, 256.
Mascheroni, 292.
Mathot, 136.
Ch. Méray, 481, 529.
Meusnier, 399.
Ch. Michel, 291.
Monge, 294.
Montel, 136.
Montesano, 166, 315.
R. de Montessus, 235.
R. de Montessus, 354.
Mouthon, 136.
Th. Muir, 176.
A. Myller, 317.

Neuberg, 136.
Newton, 290, 359.
Niewenglowski, 145.
Nœther, 262.

M. d'Ocagne, 50, 573, 574.
D'Ocagne, 289.

Padoa, 243.
L.-A. Paillard, 451.
Painvin, 57, 58, 254.
Parrod, 53, 379.
Parrod, 55.
Pautonnier, 243.
G. Pélissier, 187, 480, 524, 572.
G. Pélissier, 55, 191, 248, 479.
A. Pellet, 100, 575.
Philbert du Plessis, 361.
E. Picard, 204, 341, 354.
Poinsot, 378.
Poisson, 435.

Raffy, 438.
Retali, 140.
Retali, 191, 479, 480, 575.
Ribaucour, 252.
Riemann, 95, 201.
A. Rogoff, 266.
J. Rose, 140, 141, 479.
J. Rose, 248, 480.
Rouché, 290.

Saint-Venant, 400.
Salmon, 58, 127.
Sarrus, 289.
Sartiaux, 58.
R. de Saussure, 422.
Schwarz, 243.
Segré, 164.
J. Servais, 372, 405, 416.
Simpson, 59, 292.
Sondat, 53, 188.
Steiner, 61.
Sturm, 235.
R. Sturm, 262.
Stuyvaert, 260, 316.
Sylvester, 175.

Têtu, 54, 55, 190, 384.
Têtu, 140, 188, 248, 480.
Thié, 576.
Thybaut, 136.
E. Turrière, 87, 249, 258, 294, 377, 396, 433.

A. Vacquant, 188.
Veneroni, 261, 315.
Volterra, 318.
J. de Vries, 266.

Wölffing, 351.
Wolstenholme, 135.

Zeuthen, 164.
Zoretti, 354, 385.

42582 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
N8
v.68

Nouvelles annales
de mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

REINFORCED BINDING
WILLIAM BRIGGS